[الوحدة الأولى]

١ الدرس الأول

حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد

المعادلة : هى جملة رياضية تشمل علامة التساوى (=)

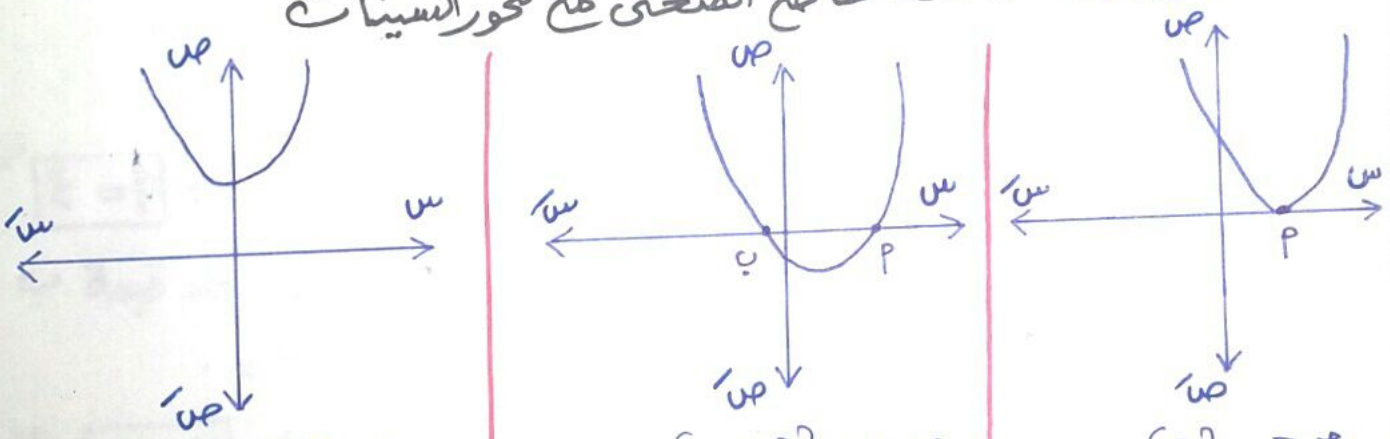
الدرجة الثانية : أى أن أكبر أس للمتغير س فى المعادلة هو ٢

حل المعادلة : هو إيجاد قيم المتغير س التى تحقق المعادلة ويسمى جذرى المعادلة

المعادلة التربيعية لها حلان جبرى وبيانى

١ الحل الجبرى : هو إيجاد قيم س بإستخدام التحليل أو القانون العام

٢ الحل البيانى : هو نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات



م.ح = {أ}

م.ح = {أ ، ب}

م.ح = ∅

مثال (١) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة

١ $س^2 - س - ١٢ = صفر$ **الحل**

بإستخدام التحليل $(س + ٣)(س - ٤) = ٠$

$س = -٣$ ، $س = ٤$

∴ م.ح = {-٣ ، ٤}

(لاحظ لها جذران)

٢ جبرياً $س^2 + ٢س + ١ = ٠$ **الحل**

$(س + ١)(س + ١) = ٠$

$س = -١$ ، $س = -١$

∴ م.ح = {-١}

(لاحظ لها جذر واحد)

٣ $س^2 = 2(س + 6)$ **الحل**

أولا نظبط ونرتب المعادلة ونصفرها

$س^2 = 2س + 12$

$س^2 - 2س - 12 = 0$

إذا فكر قليلاً سنجد أنها غير قابلة للتحليل لذلك سنلجأ للقانون العام

$\boxed{أ = 1}$ $\boxed{ب = -2}$ $\boxed{جـ = -12}$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times -12}}{2 \times 1}$

$س = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2}$ نحسبها باستخدام الآلة

$\therefore س_1 = \frac{2 + \sqrt{52}}{2}$ | $س_2 = \frac{2 - \sqrt{52}}{2}$

$\boxed{س_1 = 6,4}$ | $\boxed{س_2 = -6,2}$

$\therefore م.ح = \{6,4 ، -6,2\}$

مثال (٢)

إذا كانت $س = 6$ أحد جذري المعادلة $س^2 + 5س + أ = 0$ أوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر.

الحل بالتعويض في المعادلة عن $س = 6$

$6^2 + 5 \times 6 + أ = 0$

$36 + 30 + أ = 0 \Leftarrow \boxed{أ = -66}$

نضع $أ = -66$ في المعادلة لإيجاد الجذر الآخر

$\therefore س^2 + 5س - 66 = 0$

$(س - 6)(س + 11) = 0$

$س = 6$ $\boxed{س = -11}$

$\therefore$ الجذر الآخر هو $س = -11$

مثال ٣ أوجد قيمتي أ ، ب إذا علم أن $\frac{3}{2}$ ، $\frac{-3}{2}$ جذرا المعادلة

$أ س^2 + ب س - 9 = صفر$

الحل نعوض أولاً عن $س = \frac{3}{2}$

$أ \times (\frac{3}{2})^2 + ب \times \frac{3}{2} - 9 = 0$

$\frac{9}{4}أ + \frac{3}{2}ب - 9 = 0 \longleftarrow ①$

نعوض ثانياً عن $س = \frac{-3}{2}$

$أ \times (\frac{-3}{2})^2 + ب \times \frac{-3}{2} - 9 = 0$

$\frac{9}{4}أ - \frac{3}{2}ب - 9 = 0 \longleftarrow ②$

بجمع ① ، ②

$\frac{9}{4}أ + \cancel{\frac{3}{2}ب} - 9 = 0 \longleftarrow ①$

$\frac{9}{4}أ - \cancel{\frac{3}{2}ب} - 9 = 0 \longleftarrow ②$

بالجمع

$\frac{18}{4}أ - 18 = 0$

$\frac{\cancel{4}}{\cancel{18}} \times \frac{\cancel{18}}{\cancel{4}}أ = \cancel{18} \times \frac{4}{\cancel{18}} \Leftarrow \boxed{أ = 4}$

بالتعويض في ① لإيجاد قيمة ب

$\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}} \times \cancel{4} + \frac{3}{2}ب - \cancel{9} = 0$

$\frac{3}{2}ب = 0 \Leftarrow \boxed{ب = 0}$ #

حل آخر $\because$ الجذران أحدهما معكوس جمعي للآخر $\therefore \boxed{ب = صفر}$

$\therefore أ س^2 - 9 = 0$

$أ \times (\frac{3}{2})^2 - 9 = 0 \Leftarrow \frac{9}{4}أ = 9$

$\therefore أ = \cancel{9} \times \frac{4}{\cancel{9}}$ $\therefore \boxed{أ = 4}$

اللهم إني أسألك فهم النبيين وحفظ المرسلين
اللهم إجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك
يا أرحم الراحمين

مثال (٤) إذا كانت

د(س) = أ س² + ب − ٣ ، د(−٢) = ٥

، (١ ، −٤) ∈ لبيان الدالة أوجد

قيمة أ ، ب

الحل

∵ د(−٢) = ٥ نضع س = −٢

، د(س) = ٥

∴ أ × (−٢)² + ب − ٣ = ٥

٤أ + ب − ٣ = ٥ + ٣

٤أ + ب = ٨ ← (١)

∵ (١ ، −٤) تحقق الدالة

نضع س = ١ ، د(س) = −٤

−٤ = أ × (١)² + ب − ٣

−٤ = أ + ب − ٣

أ + ب = −٤ + ٣

∴ أ + ب = −١ ← (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن

٣أ = ٩ ⇐ أ = ٩/٣ $\boxed{أ = ٣}$

بالتعويض في (٢)

٣ + ب = −١ ⇐ ب = −١ − ٣

∴ $\boxed{ب = −٤}$

مثال (٥) حل بيانياً المعادلة

٤س (س − ١) − ٥ = صفر

الحل نضبط أولاً شكل المعادلة

٤س² − ٤س − ٥ = صفر

نوجد رأس المنحنى = (−ب/٢أ ، د(−ب/٢أ))

س = −ب/٢أ = ٤/(٢ × ٤) = ١/٢

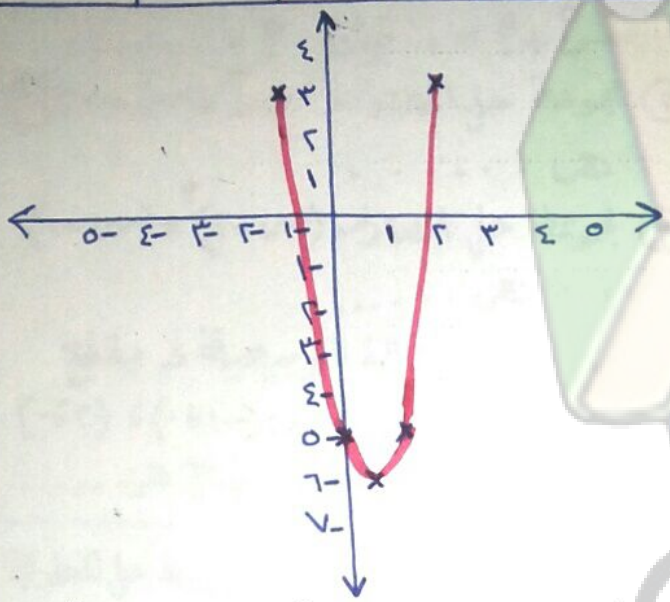
ص = د(١/٢) = ٤(١/٢)² − ٤ × ١/٢ − ٥

= ١ − ٢ − ٥ = −٦

∴ رأس المنحنى = (١/٢ ، −٦)

نكون الجدول الآتي

س	−١	٠	١/٢	١	٢
ص	٣	−٥	−٦	−٥	٣



من الرسم م.ح = {−٨ ، ٠ ، ٨ ، ١}

واجب الدرس الأول :-

الواجب (١)

١ أكمل ما يأتي

١ المعادلة س² + ٥س³ = ٨ من الدرجة .....

٢ المعادلة (س − ٣)(س + ١) = ٠ من الدرجة .....

٣ مجموعة حل المعادلة س² − س = ٠ في ح هو .....

٤ مجموعة حل المعادلة س² + ٣ = ٠ في ح هي .....

٥ إذا كان س = ٣ جذراً المعادلة س² + م س = ٣ فإن م = ...

٦ جذري المعادلة س² = ٥ في ح هما .....

مثال (٢) أوجد جبرياً حل كلاً من المعادلات الآتية في ح

[١] $س^٢ - ١ = ٠$

[٢] $س^٢ + ٥س - ٦ = ٠$

[٣] $س^٢ + ٢٥ = ٠$

[٤] $س^٢ + ٢س - ١ = ٠$

[٥] $٥س^٢ - ٣س + ٤ = ٠$

[٦] $س - \frac{٥}{س} = ٣$

مثال (٣) حل كلاً مما يأتي بيانياً

[١] $س^٢ - ٢س - ٤ = ٠$ ، $س \in [-٢ ، ٤]$

[٢] $(س - ٣)^٢ = ٥$

مثال (٤) إذا كان ٥ ، -٣ هما جذرا المعادلة $س^٢ + أس + ب = ٠$ فأوجد قيمة كل من أ ، ب .

ركن المعلمين [فكر يا معلم]

[١] إذا كان جذرا المعادلة $(س - ٣أ + ب)(س + أ - ٧ب) = صفر$ متساويين كل منهما يساوي ٥ أوجد قيمتي أ ، ب .

[٢] أوجد قيمة أ التي تجعل س = ٢ أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٢أس + ٢(أ^٢ - ١٦) = صفر$

[٣] إذا كان نقطة تقاطع المنحنى $د(س) = س^٢ + أس + ٢$ مع محور السينات هي (-١ ، -٢) فأوجد قيمة أ

إختبار (١) على الدرس الأول

س١/ أكمل ما يأتي

① إذا كان س = ٣ أحد جذري المعادلة $س^٢ + أ = ٠$ فإن أ = ...

② مجموعة حل المعادلة $س^٣ + س = ٠$ في ح هي .....

③ مجموعة حل المعادلة $(س - ١)^٢ = (س - ١)$ في ح هي .....

④ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يقطع محور السينات في النقطتين (-١ ، ٠) ، (٢ ، ٠) فإن م.ح المعادلة د(س) = ٠ في ح هي .....

س٢/ أوجد بيانياً في ح مجموعة حل المعادلة الآتية ثم حقق الناتج جبرياً :

$٢س(س + ٢) = ١$

س٣/ [أ] إذا كان ٣ ، -٢ هما جذرا المعادلة $س^٢ + أس + ب = ٠$ فأوجد قيمتي أ ، ب

[ب] أوجد في ح مجموعة حل المعادلة $\frac{٥}{س} + ٣ = \frac{٢}{س^٢}$ حيث س ≠ ٠

س٤/ ⓐ إذا كان س = -١ أحد جذري المعادلة $س^٢ + أس - ٨ = ٠$ فأوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر.

ⓑ حل في ح المعادلة $س^٢ - ٢س = ٠$

س٥/ ⓐ حل في ح جبرياً المعادلة

$٢س^٢ + ٦ = ٠$

ⓑ أوجد بيانياً مجموعة في ح مجموعة حل المعادلة $٣س - س^٢ + ٢ = ٠$ حيث $س \in [-١ ، ٤]$

٢ الدرس الثانى

الأعداد المركبة

العدد التخيلى (ت)

هو العدد الذى مربعه يساوى -١

فمثلاً $\sqrt{-٤} = \sqrt{٤ \times -١}$

$= \sqrt{٤} \times \sqrt{-١} = ٢ت$

حيث $\boxed{ت = \sqrt{-١}}$

تذكر أن :

$ت = \sqrt{-١}$	$ت^{٢} = -١$
$ت^{٣} = -ت$	$ت^{٤} = ١$

* إذا كان قوى (ت) عدد زوجى

١ فإنه إذا كان يقبل القسمة على ٤ فإن قيمته تساوى ١

مثل: $ت^{٤} = ت^{٨} = ت^{١٢} = ...$ وهكذا $= ١$

٢ إذا كان يقبل القسمة على ٢ ولا يقبل القسمة على ٤ فإن قيمته = -١

مثل $ت^{٢} = ت^{٦} = ت^{١٠} = ت^{١٤} = ...$ وهكذا $= -١$

* إذا كان قوى (ت) عدد فردى

تفكك الأسس [تنقص من الأس واحد]

فمثلاً : $ت^{٢٥} = ت^{٢٤} \times ت$

$= ١ \times ت = ت$

$ت^{١٥} = ت^{١٤} \times ت$

$= -١ \times ت = -ت$

* العدد المركب

هو عدد يمكن كتابته على الصورة (أ + ب ت) ويرمز له بالرمز (ع)

مثلاً ع = ٥ + ٢ت

← حيث أ ∈ ح ، ب ت ∉ ح

أى أن العدد المركب يتكون من جزئين جزء حقيقى وجزء تخيلى

$\boxed{ع = س + ت ص} \in ح$

حيث س ، ص ∈ ح ،

$ت = \sqrt{-١}$

س ∈ ح حقيقى

ت ص ∈ ت تخيلى

← لاحظ

← إذا كان س = ٠ فإن ع يكون تخيلى فقط

← إذا كان ص = ٠ فإن ع يكون حقيقى فقط

* تساوى عددين مركبين

إذا كان $ع_{١} = ع_{٢}$ حيث

$ع_{١} = س_{١} + ت ص_{١}$ ، $ع_{٢} = س_{٢} + ت ص_{٢}$

فإن $\boxed{س_{١} = س_{٢}}$ حقيقى = حقيقى ، $\boxed{ص_{١} = ص_{٢}}$ تخيلى = تخيلى

فمثلاً : إذا كان س + ص ت = ٣ - ٢ت

فإن س = ٣ ، ص = -٢

* أمثلة محلولة

مثال (١) أوجد في أبسط صورة:-

(أ) $ت^{١٣} = ت^{١٢} \times ت = ١ \times ت = ت$

(ب) $ت^{٤٥} = ١$

(جـ) $ت^{-٣٧} = ت^{-٣٧} \times ت^{٤٠} = ت^{٣} = -ت$

(د) $\frac{١}{ت^{٥}} = ت^{-٥} = ت^{-٥} \times ت^{٨} = ت^{٣} = -ت$

(هـ) $ت^{٤٥+٣} = ت^{٤٥} \times ت^{٣} = ١ \times -ت$

$= -ت$

(و) $\sqrt{-٣} \times \sqrt{-٣} = \sqrt{٣}\,ت \times \sqrt{٣}\,ت$

$= ٣ت^{٢} = -٣$

(ل) $\sqrt{-٣} \times \sqrt{-٥} = \sqrt{٣}\,ت \times \sqrt{٥}\,ت$

$= \sqrt{١٥}\,ت^{٢} = -\sqrt{١٥}$

مثال (٢) إختصر لأبسط صورة

$(١ - ت)^{١٠}$

الحل

$[(١-ت)^{٢}]^{٥} = [١ + ت^{٢} - ٢ت]^{٥}$

$= [\cancel{١} - \cancel{١} - ٢ت]^{٥} = [-٢ت]^{٥}$

$= (-٢)^{٥} \times ت^{٥} = -٣٢ \times ت^{٤} \times ت$

$= -٣٢ \times ١ \times ت = -٣٢ت$

مثال (٣) أوجد قيمة

$(١ - ت)^{١٠} + (١ + ت)^{١٠}$

الحل

$((١-ت)^{٢})^{٥} + ((١+ت)^{٢})^{٥}$

$(١ + ت^{٢} - ٢ت)^{٥} + (١ + ت^{٢} + ٢ت)^{٥}$

$(١ - ١ - ٢ت)^{٥} + (١ + ١ + ٢ت)^{٥}$

$(-٢ت)^{٥} + (٢ت)^{٥}$

$= -٣٢ت^{٥} + ٣٢ت^{٥} =$ صفر

مثال (٤) أوجد قيمة س، ص إذا كان

$س + ص ت = (٣ + ٢ت) + (٢ - ت)$

الحل

$س + ص ت = (٣ + ٢) + (٢ت - ت)$

$س + ص ت = ٥ + ت$

$\therefore$ $\boxed{س = ٥}$ ، $\boxed{ص = ١}$

مثال (٥) أوجد قيمتي س، ص التي تحقق المعادلة

$س - ٣ص + (٢س + ص) ت = ٦ + ٥ت$

الحل

$س - ٣ص + (٢س + ص) ت = ٦ + ٥ت$

$س - ٣ص = ٦$ ، $٢س + ص = ٥$ $\times ٣$

$س - \cancel{٣ص} = ٦$

$٦س + \cancel{٣ص} = ١٥$ بالجمع

$٧س = ٢١ \Leftarrow س = \frac{٢١}{٧}$

$\therefore$ $\boxed{س = ٣}$ بالتعويض في ②

$٢س + ص = ٥$

$٢ \times ٣ + ص = ٥ \Leftarrow ص = ٥ - ٦$

$\therefore$ $\boxed{ص = -١}$

مثال (٦) أوجد في (ح) مجموعة حل المعادلة

$س^{٢} + ١٦ = ٠$

الحل

$س^{٢} = -١٦ \Leftarrow س = \sqrt{-١٦}$

$\therefore س = \pm ٤ت$

$\therefore م.ح = \{\pm ٤ت\}$

مثال (٧) حل المعادلة $\frac{٣}{٥} ص^{٢} + ١٥ = ٠$ في (ح)

الحل

$\frac{٣}{٥} ص^{٢} = -١٥ \Leftarrow ص^{٢} = -١٥ \times \frac{٥}{٣}$

$\therefore ص^{٢} = -٢٥ \Leftarrow ص = \sqrt{-٢٥}$

$\therefore ص = \pm ٥ت$

$\therefore م.ح = \{\pm ٥ت\}$

العمليات على الأعداد المركبة

١ الجمع والطرح :-

← إذا كان ع١ = س١ + ص١ ت ، ع٢ = س٢ + ص٢ ت

فإن ع١ ± ع٢ = (س١ ± س٢) + (ص١ ± ص٢) ت

← فمثلاً : أوجد ناتج

(٢ + ٣ ت) + (٤ − ٢ ت)

الحل = (٢ + ٤) + (٣ − ٢) ت

= ٦ + ت

٢ الضرب :-

ع١ × ع٢ = (س١ س٢ − ص١ ص٢) + (س١ ص٢ + س٢ ص١) ت

مثال : أوجد ناتج (٢ + ٥ ت) (٣ + ٤ ت)

الحل = (٢ × ٣ − ٥ × ٤) + (٢ × ٤ + ٥ × ٣) ت

= (٦ − ٢٠) + (٨ + ١٥) ت

= −١٤ + ٢٣ ت

* العددان المترافقان

إذا كان ع = س + ت ص

فإن $\bar{ع}$ (المرافق) = س − ت ص

⇐ نعكس إشارة الجزء التخيلي فقط

فمثلاً : ٣ + ٥ ت $\xrightarrow{\text{مرافقه}}$ ٣ − ٥ ت

⇐ مجموع العددان المترافقان = عدد حقيقي

⇐ حاصل ضرب العددان المترافقان = عدد حقيقي

مثال (١) ضع في صورة أ + ب ت العدد $\frac{١٣}{٢ - ٣ت}$

الحل

بالضرب × مرافق المقام

$\frac{١٣}{٢ - ٣ت} \times \frac{٢ + ٣ت}{٢ + ٣ت} = \frac{١٣ \times (٢ + ٣ت)}{٤ + ٩}$

$= \frac{\cancel{١٣}(٢ + ٣ت)}{\cancel{١٣}} = ٢ + ٣ت$

أولى ثانوى

⇐ لاحظ عند ضرب العددان المترافقان نضرب كالآتي :

حقيقي × حقيقي + معامل التخيلي × معامل التخيلي

فمثلاً : (٣ − ٢ ت)(٣ + ٢ ت)

= ٣ × ٣ + ٢ × ٢ = ٩ + ٤ = $\boxed{١٣}$

مثال (٢) أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق $\frac{(٣ + ٢ت)(٢ - ت)}{٣ + ت}$ = س + ص ت

الحل الأيمن = $\frac{٦ - ٣ت + ٤ت - ٢ت^٢}{٣ + ت}$

$= \frac{٦ - ٣ت + ٤ت + ٢}{٣ + ت} = \frac{٨ + ت}{٣ + ت}$

بالضرب × مرافق المقام

$\frac{٨ + ت}{٣ + ت} \times \frac{٣ - ت}{٣ - ت} = \frac{٢٤ - ٨ت + ٣ت - ت^٢}{٩ + ١}$

$= \frac{٢٤ - ٨ت + ٣ت + ١}{١٠} = \frac{٢٥ - ٥ت}{١٠}$

$= \frac{٢٥}{١٠} - \frac{٥}{١٠} ت = \frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢} ت$

∴ $\boxed{س = \frac{٥}{٢}}$ ، $\boxed{ص = \frac{-١}{٢}}$

مثال (٣) أوجد قيمتي س ، ص حيث $\frac{٢\sqrt{٣} + \sqrt{-٣}}{\sqrt{٣} - \sqrt{-٧}}$ = ص + س ت

الحل

$\frac{٢\sqrt{٣} + \sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} - \sqrt{٣}ت} = \frac{\cancel{\sqrt{٣}}(٢ + ت)}{\cancel{\sqrt{٣}}(١ - ت)}$

$= \frac{٢ + ت}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت}$ بالضرب × المرافق للمقام

$= \frac{٢+٦ت+ت+٣ت^٢}{١+٩} = \frac{-١+٧ت}{١٠}$

∴ $\boxed{ص = \frac{-١}{١٠}}$ ، $\boxed{س = \frac{٧}{١٠}}$

مثال (٤) أوجد قيمتي س ، ص حيث

س + ص ت = (٢ − ٣ت)^٢ الحل

س + ص ت = ٤ + ٩ت^٢ − ١٢ت

= ٤ − ٩ − ١٢ت

= −٥ − ١٢ت

∴ $\boxed{س = -٥}$ ، $\boxed{ص = -١٢}$

الواجب الثاني

[١] ضع ما يأتي في أبسط صورة :-

① ت^٢٨ ② ت^٧٢ ③ ت^٦٦

④ ت^−٣٠ ⑤ ت^٤٣ ⑥ $\frac{١}{ت^{١٩}}$

⑦ ت^(١٢ن+٣) ⑧ ت^(٤ن−٢)

⑨ $\sqrt{-١٥}$ ⑩ $\sqrt{-٣} \times \sqrt{-٦}$

[٢] حل كلاً من المعادلات الآتية في S :-

[١] ص^٢ + ٤٩ = ٠

[٢] ٤س^٢ − س + ١ = ٠

[٣] أوجد قيمتي س ، ص اللتان تحققان كلاً من المعادلات الآتية :-

[١] س + ت ص = (٤ − ٣ت) + (١ − ٢ت)

[٢] س^٢ + ت ص = (٣ − ت)(٣ + ت)

[٣] ٣س − ٢ص ت = (٥ − ٢ت)^٢

[٤] ٣س + س ت − ٢ص + ص ت = ٥

[٥] س^٢ − ص^٢ + (س + ص) ت = ٣(١ + ت)

الواجب الثالث (العمليات في S)

[١] أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة :-

① (٣ + ٤ت) + (٥ − ت)

② (٤ − ٣ت) − (−٥ + ٣ت)

③ (١ − ٢ت)(١ + ٥ت)

④ (٢ − ٥ت)^٢

⑤ (١ − ت)^٧ (١ + ت)^٧

⑥ (١ − ت)^١٢

⑦ (٥ − ت)(٥ + ت) − ٢٦ت^٨

[٢] ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة :-

[١] $\frac{٤+ت}{ت}$ [٢] $\frac{٣}{١-ت}$

[٣] $\frac{٢+٥ت}{٣+ت}$ [٤] $\frac{(٣+٢ت)(٢-ت)}{٣+ت}$

[٥] $\frac{٢\sqrt{٣}+\sqrt{-٨}}{\sqrt{٣}-\sqrt{-١٨}}$

[٣] إذا كان س = $\frac{١٣}{٥-ت}$ ، ص = $\frac{٣+٢ت}{١+ت}$

إثبت أن س ، ص عددان مترافقان

[٤] إذا كان $\frac{٣-٢ت}{١+ت}$ = س + ت ص

أوجد قيمة س ، ص

شغل دماغك :-

إذا كان س = $\frac{٢+ت}{٢-ت}$ ، ص = $\frac{٢+٣ت}{٢+ت}$

وكان : ٢س − ص = أ + ب ت

فأثبت أن : ٩أ^٢ + ب^٢ = ١

إختبار (١) على الأعداد المركبة

١ أكمل ما يأتى

① $ت^{50}$ = ... فى أبسط صورة

② س + ت ص = ٣ − ت فإن

س = ... ، ص = ...

③ (٣ − ت)(٣ + ت) = ...

④ ت(−٥ ت) = ...

٢ إختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس:-

١ مجموعة حل المعادلة $س^2 + 9 = 0$ فى ح هى ...

[{٣ ، −٣} ، {−٣ ت} ، {±٣ ت} ، ∅]

٢ مجموعة حل المعادلة $س^2 + 9 = 0$ فى ح هى .....

[{−٣ ، ٣} ، {±٣ ت} ، ∅ ، {٣ ت}]

٣ $\sqrt{-2} \times \sqrt{-8}$ = ...

[٤ ، −٤ ، ٤ ت ، −١٦]

٤ أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{52}$ هو .....

[−١ ، ١ ، ت ، −ت]

٣ أ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة

$س^2 - 3س + 4 = 0$

ب ضع فى أبسط صورة $\frac{2}{1 + ت}$

٤ ⓐ أوجد ناتج ما يأتى فى أبسط صورة

(٢٠ + ٢٥ ت) − (٩ − ٢٠ ت)

ب أوجد $(3 - ت)^8$ فى أبسط صورة

٥ إذا كان س = ٣ + ٢ ت ، ص = $\frac{4 - 2ت}{1 - ت}$

فأوجد س + ص فى صورة عدد مركب

إختبار (٢) (على الأعداد المركبة)

١ أكمل ما يأتى

١ $ت^{-14}$ = ... فى أبسط صورة

٢ $(-2ت)^2 \{-3ت\}$ = ... فى أبسط صورة

٣ $ت^{20} + ت^{25} + ت^3 + ت^{35}$ = ...

٤ $(1 - ت)^8$ = ...

٢ إختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس:-

① مرافق العدد ٣ + ٢ ت هو .....

[−٣ − ٢ ت ، −٣ + ٢ ت ، ٢ ت − ٣ ، −٢ ت + ٣]

② مجموعة حل المعادلة $4س^2 + 9 = 0$ فى ح هى ....

[∅ ، ±$\frac{9}{4}$ ، ±$\frac{3}{2}$ ت ، $\frac{-9}{4}$]

③ إذا كان أ = ١ + ٢√٢ ت ، ب = ١ − ٢√٢ ت

فإن أ ب = ...

[−١ ، ١ ، ٢ ، ٣]

④ أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{-35}$ هو .....

[١ ، −١ ، ت ، −ت]

٣ ⓐ إثبت أن $3 + 3ت^{-1} + 3ت^{-2} + 3ت^{-3} + 3ت^{-4} = 3$

ب أوجد قيمة س ، ص حيث

$\frac{(3 + ت)(1 - ت)}{1 + ت}$ = س + ت ص

٤ إذا كان $ع_1$ = أ + ب ت ، $ع_2$ = ٣ − ٤ ت

وكانت $ع_1 + ع_2$ = ٥ − ٤ ت أوجد قيمة أ ، ب

٥ ⓐ إذا كان $\frac{10}{3 + ت}$ = ٢ أ + ب ت أوجد قيمة أ ، ب

ب أوجد قيمة (٣ + ٢ت)(١ − ت) فى أبسط صورة

إختبار (٣) على الأعداد المركبة

١ أكمل ما يأتي

١ $\sqrt{-٣٦}$ = ... في أبسط صورة

٢ إذا كان س = ٣ + $\sqrt{٥}$ ت ، ص = ٣ − $\sqrt{٥}$ ت فإن س^{٢}ص^{٢} = ...

٣ إذا كان أ = ١ + ت ، ب = ١ − ت فإن أ^{٢} + ب^{٢} + ٢أب = ...

٤ إذا كان ل = ٢ + ٣ت ، م = ٢ − ٣ت فإن ل^{٢} + م^{٢} = ...

٢ السؤال الثاني :

أ إذا كانت س = ١ − $\sqrt{٢}$ ت أوجد قيمة س^{٢} − ٢س + ٣

ب إثبت أن

(١ + ت)^{٣} + (١ − ت)^{٣} = −٤

٣ السؤال الثالث :

أ إختصر لأبسط صورة

(٢ − $\sqrt{٣}$ ت^{٢}) (٢ + $\sqrt{٣}$ ت^{٦}) (١٦ + ١٢ ت^{٤} + ٩ ت^{٨})

ب إذا كان س = $\frac{٢ + ت}{٢ - ت}$ ، ص = $\frac{٢ + ٣ت}{٢ + ت}$ ، ٢س − ص = أ + ب ت

إثبت أن ٩أ^{٢} + ب^{٢} = ١

٤ السؤال الرابع :

أ أوجد قيمة : (١ + ٢ت^{٣}) (٢ + ٣ت^{٥} + ٤ت^{٦})

ب حل المعادلة الآتية في ح س^{٤} − ١٦ = ٠

٥ السؤال الخامس :

إذا كان $\overline{ع}$ هو مرافق العدد ع حيث ع = س + ت ص فأوجد العدد ع

حيث (١ + ت) ع + (١ − ٣ت) $\overline{ع}$ = −٢ + ٢ت

٣ الدرس الثالث

تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

المميز $\boxed{ب^٢ - ٤ أ جـ}$

إذا كان المميز > صفر (موجب) ∴ الجذران حقيقيان مختلفان

إذا كان المميز = صفر ∴ الجذران حقيقيان متساويان

إذا كان المميز < صفر (سالب) ∴ الجذران غير حقيقيان (مركبان)

* الجذران عددان نسبيان

يكون الجذران عددان نسبيان إذا كان أ ، ب ، جـ أعداد نسبية والمميز ب^٢ - ٤ أ جـ = عدد مربع كامل (أى له جذر تربيعى)

تذكر أن : المربع الكامل يتكون من ٣ حدود الحد الأول والحد الأخير لهما جذر تربيعى والحد الأوسط = ٢ × الأول × الأخير

مثل س^٢ + ٢ س ص + ص^٢ = (س + ص)^٢

مثال (١) ابحث نوع جذرى المعادلة :

٢ س^٢ + ١٠ س - ٥ = ٠ الحل

أ = ٢ ، ب = ١٠ ، جـ = -٥

المميز = ب^٢ - ٤ أ جـ

= (١٠)^٢ - ٤ × ٢ × -٥

= ١٠٠ + ٤٠ = ١٤٠ موجب

∴ المميز > صفر

∴ الجذران حقيقيان مختلفان

مثال (٢) حدد نوع جذرى المعادلة

س^٢ - ٦ س + ٩ = ٠ الحل

أ = ١ ، ب = -٦ ، جـ = ٩

المميز = ب^٢ - ٤ أ جـ = (-٦)^٢ - ٤ × ١ × ٩

= ٣٦ - ٣٦ = صفر

∴ الجذران حقيقيان متساويان

مثال (٣) حدد نوع جذرى المعادلة

٩ س^٢ + ٢٥ = صفر الحل

أ = ٩ ، ب = صفر ، جـ = ٢٥

المميز = ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠ - ٤ × ٩ × ٢٥

= -٩٠٠

∴ المميز < صفر سالب

∴ الجذران غير حقيقيان (مركبان)

مثال (٤) أوجد قيمة ك التي تجعل جذري المعادلة $٢س^٢ - ٤س + ك = ٠$ متساويان

الحل

∵ الجذران متساويان

∴ $ب^٢ - ٤أجـ = صفر$

$(٤)^٢ - ٤ \times ٢ \times ك = صفر$

$١٦ - ٨ك = صفر$

$٨ك = ١٦ \Leftarrow ك = \frac{١٦}{٨}$

∴ $\boxed{ك = ٢}$

مثال (٥) إذا كان جذري المعادلة $٤س^٢ - أس + ٩ = ٠$ متساويان أوجد أ

الحل

$ب^٢ - ٤أجـ = ٠$

$(أ)^٢ - ٤ \times ٤ \times ٩ = ٠$

$أ^٢ - ١٤٤ = ٠ \Leftarrow أ^٢ = ١٤٤$

∴ $أ = \sqrt{١٤٤} = \pm ١٢$

مثال (٦) أوجد قيمة م التي تجعل $(م + ١)س^٢ - ٢مس + م = ٠$ ليس لها جذور حقيقية

الحل

ليس لها جذور حقيقية ∴ $ب^٢ - ٤أجـ < صفر$

$(-٢م)^٢ - ٤(م + ١) \times م < صفر$

$٤م^٢ - ٤م(م + ١) < صفر$

$\cancel{٤م^٢} - \cancel{٤م^٢} - ٤م < صفر$

$\frac{-٤م}{-٤} < \frac{صفر}{-٤}$ $\boxed{م > صفر}$

∴ $م \in]٠ ، \infty[$

مثال (٧) إذا كان أ ، ب عددان نسبيان إثبت أن جذري المعادلة $أس^٢ + (٢أ - ب)س - ٢ب = صفر$ عددان نسبيان

الحل

المميز $= ب^٢ - ٤أجـ$

$= (٢أ - ب)^٢ - ٤ \times أ \times -٢ب$

$= ٤أ^٢ + ب^٢ - ٤أب + ٨أب$

$= ٤أ^٢ + ٤أب + ب^٢$

$= (٢أ + ب)^٢ =$ مربع كامل

∴ الجذران عددان نسبيان

مثال (٨) إثبت أنه لجميع قيم أ ، ب يكون جذرا المعادلة $(س - أ)(س - ب) = ٥$ حقيقيان

الحل $س^٢ - بس - أس + أب = ٥$

$س^٢ + (-ب - أ)س + (أب - ٥) = صفر$

المميز $= ب^٢ - ٤أجـ$

$= (-ب - أ)^٢ - ٤ \times ١ \times (أب - ٥)$

$= ب^٢ + أ^٢ + ٢أب - ٤أب + ٢٠$

$= أ^٢ + ب^٢ - ٢أب + ٢٠$

$= \underline{أ^٢ - ٢أب + ب^٢} + ٢٠$

$= (أ - ب)^٢ + ٢٠ >$ صفر دائماً

∴ الجذران حقيقيان لجميع قيم أ ، ب

مثال (٩) أوجد الفترة التي تنتمي إليها أ والتي تجعل جذري المعادلة $(أ + ٢)س^٢ + ٢(أ + ١)س + أ = ١$ حقيقيان

$(أ+٢)س^٢ + ٢(أ+١)س + أ - ١ = صفر$

المميز $= ب^٢ - ٤أجـ$

$= [٢(أ+١)]^٢ - ٤ \times (أ+٢) \times (أ-١)$

$= (٢أ+٢)^٢ - ٤(أ^٢ - أ + ٢أ - ٢)$

$= ٤أ^٢ + ٨أ + ٤ - ٤أ^٢ + ٤أ - ٨أ + ٨$

$= ٤أ + ١٢$

∵ الجذران حقيقيان

∴ $٤أ + ١٢ \geq ٠$

$٤أ \geq -١٢ \Leftarrow أ \geq \frac{-١٢}{٤}$

∴ $أ \geq -٣$ ∴ $أ \in [-٣ ، \infty[$

مثال (١٠) إثبت أن جذري المعادلة $\frac{١}{س+أ} = \frac{١}{س} + \frac{١}{أ}$ غير حقيقيين إذا كانت $أ \in ح^*$ ، $س \notin \{-أ ، -أ\}$

الحل

$\frac{١}{س+أ} = \frac{س+أ}{س \times أ}$

$\frac{١}{س+أ} = \frac{س+أ}{س أ}$

$س أ = س^٢ + أس + أس + أ^٢$

$س^٢ + أس + أ^٢ = ٠$

المميز $= ب^٢ - ٤أجـ$

$= أ^٢ - ٤ \times ١ \times أ^٢ = أ^٢ - ٤أ^٢$

$= -٣أ^٢$

∵ $أ \in ح^*$ أي جميع الأعداد الحقيقية ماعدا الصفر

∴ $-٣أ^٢ <$ صفر دائماً

∴ جذري المعادلة غير حقيقيين

الواجب الرابع ٤

مثال ١ حدد نوع جذري المعادلات الآتية

١) $س^٢ - ١١س + ١٠ = ٠$

٢) $٤ - ٢س = ٥س^٢$

٣) $٢س^٢ = ٦س$

٤) $س + \frac{٥}{س} = ١$

٥) $\frac{س}{س+١} + \frac{س}{س-١} = ٣$

مثال (٢) إذا كان جذرا كل معادلة من المعادلات الآتية متساويان فأوجد قيم ك في كل حالة

١) $٢س^٢ + كس + ٥ = ٠$

٢) $س^٢ + ٢(ك-١)س + (٢ك+١) = ٠$

مثال ٣

أوجد قيم ك التي تجعل للمعادلة $٥س^٢ + ٤س + ك = ٠$ إذا كان

١) الجذران حقيقيين متساويين

٢) الجذران حقيقيين مختلفين

٣) الجذران مركبان

مثال ٤

إثبت أن جذري المعادلة $س^٢ + كس + ١ = ٠$ دائماً نسبيان حيث $ك \in ن$

شغل دماغك

إذا كان أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية فأثبت أن جذري المعادلة:

$س^٢ + ٢أس + أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢$ حقيقيان

إختبار (١) (على تحديد نوع الجذران)

١ أكمل ما يأتي

١ إذا كان جذرا المعادلة ٤س² − ١٢س + جـ = ٠ متساويان فإن جـ = ...

٢ مجموعة حل المعادلة التربيعية = ∅ في ح إذا كان المميز .....

٣ عدد حلول المعادلة س² − ٤ = ٠ هو ...

٤ جذرا المعادلة ك س² + ٤س + ٣ = ٠ متساويان فإن ك = ...

٢ (أ) حدد نوع جذري المعادلة

٧س² − ١١س = −٥

(ب) إذا كان جذري المعادلة ٢س² + √٥ + ٤ك = ٠ أوجد قيمة ك

٣ (أ) أوجد قيمة ك إذا كان جذري المعادلة ك س² − ٦س + ١٦ = ٠ مركبين

(ب) إثبت أن جذري المعادلة ٧س² − ١١س + ٥ = ٠ مركبين ثم أوجد هذين الجذرين

٤ (أ) إذا كان ل، م ~~جذري المعادلة~~ عددان نسبيان فأثبت أن جذري المعادلة ل س² + (ل − م) س − م = ٠ نسبيان

(ب) إبحث نوع جذري المعادلة ٢س² − ٣س + ٥ = ٠

٥ حدد عدد جذور المعادلة ٣س² + ١٠س − ٤ = صفر دون حلها

إختبار (٢)

١ أكمل ما يأتي

(١) إذا كان ب² − ٤أجـ > ٠ فإن عدد جذور المعادلة يساوي .....

(٢) يكون للمعادلة س² − ٢س + م = ٠ جذران حقيقيان مختلفان إذا كانت م ∈ ....

(٣) يكون للمعادلة س² − ٢س + ٩ل جذران مركبان إذا كانت ل ∈ .....

(٤) عدد جذور المعادلة س² + ٥ = ٠ تساوي ....

٢ إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :-

١ إذا كان جذرا المعادلة س² − ٦س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين فإن ك ∈ .....

[ ]−∞، ٩[،]٩، ∞[،]−∞، ٩] ، [٩، ∞[ ]

٢ إذا كان جذري المعادلة التربيعية نسبيان فإن عدد جذورها ∈ .....

[{٢} ، {١، ٢} ، ∅ ، {صفر}]

٣ إذا كان ب² − ٤أجـ ≤ صفر فإن الجذران يكونان ..... [حقيقيان، مركبان، صحيحان]

٤ مجموعة حل المعادلة س³ + س = ٠ في ح هي .... [{٠} ، {± ت} ، {٠، ± ت} ، ∅]

٣ (أ) إثبت أنه لجميع قيم م لا يكون للمعادلة (م² + ١) س² − ٢م س + م² = ٠ جذور حقيقية

(ب) حدد نوع جذري المعادلة ٣/س + ٤/س² = ١

٤ إثبت أن جذري المعادلة نسبيان م س² + (م² + ن) س + أب = صفر

٥ المعادلة م² س² + (٢م − ٢) س + ١ = ٠ ليس لها حل في ح أوجد قيم م الحقيقية

٤ الدرس الرابع [العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية]

الصورة العامة للمعادلة التربيعية $\boxed{\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{صفر}}$

* مجموع الجذرين (ل + م) = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

* حاصل ضرب الجذرين (ل م) = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

هام جداً

١ إذا كان أحد جذري المعادلة معكوس جمعي للجذر الآخر فإن مجموع الجذرين = صفر أي أن $\boxed{\text{ب} = \text{صفر}}$

٢ إذا كان أحد جذري المعادلة معكوس ضربي للجذر الآخر فإن حاصل ضرب الجذرين (ل م) = ١ أي أن $\boxed{\text{أ} = \text{جـ}}$

١ أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة $٣\text{س}^2 - ٥\text{س} + ٦ = ٠$

الحل مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \boxed{\frac{٥}{٣}}$

حاصل ضربهم = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٦}{٣} = \boxed{٢}$

مثال ٢ أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة: $(٢\text{س} + ١)(\text{س} - ٥) = ٣$

الحل $٢\text{س}^2 - ١٠\text{س} + \text{س} - ٥ = ٣$

$٢\text{س}^2 - ١٠\text{س} + \text{س} - ٥ - ٣ = ٠$

$٢\text{س}^2 - ٩\text{س} - ٨ = ٠$

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{٩}{٢}$

∴ ضرب الجذرين = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{-٨}{٢} = -٤$

مثال ٣ أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة: $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{١}{\text{س}} = ٣$

الحل بضرب المعادلة ⇐ × ٢س

$\frac{\text{س}}{\cancel{٢}} \times \cancel{٢}\text{س} + \frac{١}{\cancel{\text{س}}} \times ٢\cancel{\text{س}} = ٣ \times ٢\text{س}$

$\text{س}^2 + ٢ = ٦\text{س}$

$\text{س}^2 - ٦\text{س} + ٢ = ٠$

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{٦}{١} = \boxed{٦}$

∴ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٢}{١} = \boxed{٢}$

مثال ٤ أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة $٣\text{س}^2 + (٢\text{ك} - ٥)\text{س} + ٤ = ٠$ معكوس جمعي للجذر الآخر

الحل

∵ أحد جذري معكوس جمعي للآخر

∴ ب = صفر ∴ $٢\text{ك} - ٥ = ٠$

$٢\text{ك} = ٥$ ∴ $\boxed{\text{ك} = \frac{٥}{٢}}$

مثال ٥ أوجد قيمة م التي تجعل أحد جذري المعادلة $٢\text{م س}^2 + \sqrt{٥}\text{س} + ٧\text{م} - ٦ = ٠$ معكوس ضربي للجذر الآخر.

الحل

∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ أ = جـ ⇐ $٢\text{م} = ٧\text{م} - ٦$

$٧\text{م} - ٢\text{م} = ٦$ ⇐ $٥\text{م} = ٦$

∴ $\boxed{\text{م} = \frac{٦}{٥}}$

مثال (٦) أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة $س^2 - ك س + ١٢ = ٠$ ثلاثة أمثال الجذر الآخر

الحل

نفرض أن الجذران هما ل ، ٣ل

مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$

$ل + ٣ل = \frac{ك}{١} \Leftarrow \boxed{٤ل = ك} \leftarrow ①$

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ}$

$ل \times ٣ل = \frac{١٢}{١} \Leftarrow ٣ل^2 = ١٢$

$ل^2 = \frac{١٢}{٣} \Leftarrow \sqrt{ل^2} = \sqrt{٤} \Leftarrow \boxed{ل = \pm ٢}$

بالتعويض في ①

$\therefore ٤ \times \pm ٢ = ك \Leftarrow \boxed{ك = \pm ٨}$

مثال (٧) إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $٢س^2 - ٣س + ك = ٠$ يساوي ١ أوجد قيمة ك ثم حل المعادلة في ح

الحل حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ} = \frac{ك}{٢} = ١$

$\therefore \boxed{ك = ٢}$

$\therefore$ المعادلة هي $٢س^2 - ٣س + ٢ = ٠$

$\boxed{أ = ٢}$ ، $\boxed{ب = -٣}$ ، $\boxed{جـ = ٢}$

$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ٢ \times ٢}}{٢ \times ٢}$

$س = \frac{٣ \pm \sqrt{-٧}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}\,ت}{٤}$

$\therefore م.ح = \left\{ \frac{٣ + \sqrt{٧}\,ت}{٤} ، \frac{٣ - \sqrt{٧}\,ت}{٤} \right\}$

مثال (٨) أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة $أس^2 + ب س + جـ = ٠$ يساوي المعكوس الجمعي لضعف الآخر

الحل نفرض أن الجذران هما ل ، -٢ل

مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$

$ل + (-٢ل) = \frac{-ب}{أ}$

$-ل = \frac{-ب}{أ} \quad \therefore \boxed{ل = \frac{ب}{أ}} \leftarrow ①$

حاصل ضربهم $= \frac{جـ}{أ}$

$ل \times -٢ل = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow \boxed{-٢ل^2 = \frac{جـ}{أ}} \leftarrow ②$

بالتعويض من ① في ②

$-٢\left(\frac{ب}{أ}\right)^2 = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow -٢\frac{ب^2}{أ^2} = \frac{جـ}{أ}$

$\frac{-٢ب^2}{أ^2} = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow \frac{-٢\cancel{أ}ب^2}{\cancel{أ}} = \frac{أ^2 جـ}{أ}$

$-٢ب^2 = أجـ$

$\therefore$ الشرط هو $\boxed{أجـ = -٢ب^2}$

مثال (٩) إذا كان (١+ت) أحد جذري المعادلة $س^2 - ٢س + أ = ٠$ أوجد الجذر الآخر وقيمة أ

الحل

نفرض أن الجذران هما ل ، (١+ت)

مجموع الجذران $= \frac{-ب}{أ}$

$ل + (١+ت) = \frac{٢}{١}$

$ل + ١ + ت = ٢ \Leftarrow ل = ٢ - ١ - ت$

$\therefore ل = ١ - ت$

$\therefore$ الجذر الآخر هو $\Leftarrow$ (١- ت)

في المثال السابق لإيجاد أ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ}$

$(١ - ت)(١ + ت) = \frac{أ}{١}$

$١ + ١ = أ \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$

(رب إشرح لي صدري ويسر لي أمري
وأحلل عقدة من لساني يفقه قولي)

مثال (١٠) إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ كنسبة ٣ : ٥ وإثبت أن $١٥ ب^٢ = ٦٤ أ جـ$

الحل نفرض أن الجذران هما ٣ل ، ٥ل

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$

$٣ل + ٥ل = \frac{-ب}{أ} \Leftarrow \frac{٨ل}{٨} = \frac{-ب}{أ} \div ٨$

$ل = \frac{-ب}{٨أ} \leftarrow ①$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$

$٣ل \times ٥ل = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow ١٥ل^٢ = \frac{جـ}{أ}$

$١٥ \left(\frac{-ب}{٨أ}\right)^٢ = \frac{جـ}{أ}$

$١٥ \times \frac{ب^٢}{٦٤أ^٢} = \frac{جـ}{أ}$

$\frac{١٥ أ ب^٢}{أ} = \frac{٦٤ أ^٢ جـ}{أ}$

$\boxed{١٥ ب^٢ = ٦٤ أ جـ}$ #

مثال (١١) أوجد قيمة أ التي تجعل مجموع جذري المعادلة $س^٢ - (أ+٢) س + ٦ = ٠$ يساوي حاصل ضرب جذري المعادلة $س^٢ + ٥أ س + أ^٢ = ٠$

الحل

مجموع جذري المعادلة الأولى = $\frac{أ+٢}{١} = أ + ٢$

حاصل ضرب جذري المعادلة الثانية = $\frac{أ^٢}{١} = أ^٢$

$\therefore أ^٢ = أ + ٢$

$أ^٢ - أ - ٢ = ٠$

$(أ - ٢)(أ + ١) = ٠$

$\boxed{أ = ٢}$ ، $\boxed{أ = -١}$

مثال (١٢) أوجد قيمة م التي تجعل أحد جذري المعادلة $س^٢ - م س + ١٠ = ٠$ يزيد عن ضعف الجذر الآخر بمقدار ١

الحل نفرض أن الجذران هما ل ، ٢ل + ١

مجموع الجذران = $\frac{-ب}{أ}$

$٣ل + ١ = \frac{م}{١} \Leftarrow \boxed{م = ٣ل + ١} \leftarrow ①$

حاصل ضرب الجذران = $\frac{جـ}{أ}$

$٢ل^٢ + ل = \frac{١٠}{١} \Leftarrow ٢ل^٢ + ل - ١٠ = ٠$

$(٢ل + ٥)(ل - ٢) = ٠$

$ل = \frac{-٥}{٢}$ | $ل = ٢$

$\therefore م = ٣ \times \frac{-٥}{٢} + ١$ | بالتعويض في ①: $\therefore م = ٣ \times ٢ + ١$

$\therefore \boxed{م = \frac{-١٣}{٢}}$ | $\therefore \boxed{م = ٧}$

مثال (١٣) أوجد قيمة جـ إذا علم أن جذري المعادلة $س^٢ - جـ س + ٨ = ٠$ هما ل ، ٣ل + ٢

الحل

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$

$ل(٣ل + ٢) = \frac{٨}{١}$

$٣ل^٢ + ٢ل - ٨ = ٠$

$(٣ل - ٤)(ل + ٢) = ٠$

$\boxed{ل = \frac{٤}{٣}}$ ، $\boxed{ل = -٢}$

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$

$ل + ٣ل + ٢ = \frac{جـ}{١} \Leftarrow ٤ل + ٢ = جـ$

$جـ = ٤ \times \frac{٤}{٣} + ٢$ | $جـ = ٤ \times -٢ + ٢$

$\boxed{جـ = \frac{٢٢}{٣}}$ | $\boxed{جـ = -٦}$

الواجب الخاص ٥

مثال ١ دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذريها في كل مما يأتي

① $س^٢ + ٣س - ١٠ = ٠$

② $٣س^٢ = ٢٣س - ٣٠$

③ $س^٢ - ٣س = ٠$

٤ (٢س − ٣)(س + ٢) = ٠

٥ $\frac{٣س + ٢}{س + ٢} = \frac{س + ١}{س − ١}$ س ∉ {١، −٢}

٦ (أ − ١) س² + ٣س − أس − ٣ + أ = ٠

مثال ٢ أوجد قيمة أ، ب في كل من المعادلات الآتية إذا كان:

١ ٢، ٥ جذري المعادلة س² + أس + ب = ٠

٢ ٣، ت، −٣ت جذري المعادلة س² + أس + ب = ٠

مثال ٣ أوجد قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة (أ − ٥) س² + ٩س + ١ = ٠ معكوس ضربي للآخر.

مثال ٤ إذا كان أحد جذري المعادلة س² − ٥س + ك = ٠ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ١ أوجد قيمة ك

مثال ٥ إذا كان مجموع جذري المعادلة (أ + ١) س² + (٣أ − ١) س + أ² + ١ = ٠ يساوي حاصل ضربهما أوجد قيمة أ

مثال ٦ أوجد قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة ٨س² − ٣س + أ = ٠ مربع الجذر الآخر

شغل دماغك

إذا كان أحد جذري المعادلة س² + أس + ب = ٠ ضعف الجذر الآخر، أحد جذري المعادلة س² + أس + جـ = ٠ ثلاثة أمثال الآخر أوجد ب : جـ

إختبار (١) (على العلاقة بين جذري المعادلة)

١ أكمل ما يأتي:-

١ في المعادلة ٣س² − ٦س + ٥ = ٠ فإن مجموع الجذرين = ... ، حاصل ضربهم = ...

٢ حاصل ضرب جذري المعادلة ٢س² − ٨س = ٠ يساوي .....

٣ إذا كان أحد جذري المعادلة س² + (٢ك + ١) س + ٢ = ٠ معكوس جمعي للآخر فإن ك = ...

٤ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة أس² + ٣س − ٤ = ٠ يساوي ٨ فإن أ = ...

٢ إختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس:-

١ قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة ٥س² + (أ − ٣) س − ٤٥ = ٠ هو المعكوس الجمعي للآخر فإن أ = ... [٨، ٣، ١٥، ٤٥]

٢ مجموع جذري المعادلة ٥س² = ٢ − ٣س هو ... [$\frac{٣}{٥}$، $\frac{-٣}{٥}$، $\frac{٢}{٥}$، $\frac{-٢}{٥}$]

٣ إذا كان أحد جذري المعادلة أس² − ٣س + ٢ = ٠ معكوس ضربياً للآخر فإن أ = ... [$\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٢}$، ٢، ٣]

٤ حاصل ضرب جذري المعادلة ٣س² − ٤ = ٠ يساوي .... [$\frac{٤}{٣}$، $\frac{-٤}{٣}$، ٤، ٣]

٣ إذا كان أحد جذري المعادلة ٢س² + س + $\frac{١}{ك}$ = ٠ هو المعكوس الضربي للآخر أوجد قيمة ك

٤ إذا كان مجموع جذري المعادلة ٢س² + أس − ٥ = ٠ يساوي $\frac{-٣}{٢}$ أوجد قيمة أ

٥ أوجد مجموع وحاصل ضربي جذري المعادلة ٣(س − ١) = ٥

جبر

إختبار (٢)

[١] أكمل ما يأتي :-

[١] إذا كان جذرا المعادلة $س^2 + ٤س + أ = ٠$ متساويين فإن قيمة أ = ...

[٢] حاصل ضرب جذري المعادلة $٣ + ٢س - \frac{١}{٤}س^2 = ٠$ يساوي .....

[٣] ل ، (٣ - ل) هما جذرا المعادلة : $س^2 - أس - ٨ = ٠$ فإن أ = ...

[٤] أحد جذري المعادلة $جـ س^2 + ب س + ب^2 = ٠$ نصف الآخر فإن جـ = ...

[٢] إختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :-

① في المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = ٠$ كان مجموع جذريها = حاصل ضربهم فإن ب = ...
[أ ، -أ ، جـ ، -جـ]

② إذا كان ل ، م جذري المعادلة $س^2 - ٥س + ٦ = ٠$ فإن $ل^4 م^4$ = ...
[٠ ، ١ ، ٦ ، ١٢٩٦]

③ حاصل ضرب جذري المعادلة
$(ك - ٢) س^2 - ٦س + ١٢ = ٠$ هو ٣ فإن ك = ...
[٠ ، ٤ ، ٦ ، ٣٨]

④ إذا كان أحد جذري المعادلة
$٢س^2 + |٥أ - ١| س + ٣ = ٠$ معكوس جمعي للآخر فإن أ = ...
[$\frac{١}{٥}$ ، ١ ، ٥ ، $\pm\frac{١}{٥}$]

[٣] إذا كان (ل - ١) ، ٥ هما جذرا المعادلة $س^2 - أس + ١٥ = ٠$ أوجد قيمة ل ، أ

[٤] النسبة بين جذري المعادلة $س^2 - ب س + ٤ = ٠$ تساوي ١ : ٤ أوجد قيمة ب

[٥] أوجد قيمة ك إذا كان جذري المعادلة $ك س^2 - ١٢س + ٩ = ٠$ متساويان

أولى ثانوي

إختبار (٣)

[١] أكمل ما يأتي :-

[١] مجموع جذري المعادلة $٣س^2 - ١ = ٠$ هو .....

[٢] إذا كانت د(س) = $٣س^2 + ٧س + جـ$ ، د(٣) = ٣٥ فإن جـ = ...

[٣] إذا كان (س + ١) أحد عوامل المقدار $س^2 + أس - ٧$ فإن أ = ...

[٤] حاصل ضرب جذري المعادلة س(٢س - ٣) = ٧ يساوي .....

[٢] (أ) أوجد قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة $س^2 - أس + ٢١ = ٠$ يزيد عن ضعف الآخر بمقدار ١

(ب) أوجد الشرط اللازم ليكون أحد جذري المعادلة $أس^2 + ب س + جـ = ٠$ يساوي خمسة أمثال الجذر الآخر

[٣] (أ) إذا كان أحد جذري المعادلة $٢س^2 + ك^2 = ٥س + ٢$ معكوس ضربي للآخر أوجد قيمة ك

(ب) ل ، م جذري المعادلة
$(ك - ١) س^2 - ك س + ١ = ٠$ حيث ك ≠ ١
أوجد قيمة ك الحقيقية التي تجعل
$\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = ٣$

[٤] أوجد قيمة أ التي تجعل الفرق بين جذري المعادلة $س^2 - أس + ٢ = ٠$ يساوي الفرق بين جذري المعادلة $٤س^2 + ٨س + أ = ٠$

[٥] أوجد قيم أ التي تجعل المعادلة :
$٣س^2 - (٢أ - ١) س + (أ - ٤) = ٠$
جذرين مختلفين في الإشارة

٥ الدرس الخامس :

تكوين المعادلة التربيعية

* الصورة العامة للمعادلة التربيعية :

س² - (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠

* متطابقات هامة :

١ ل² + م² = (ل + م)² - ٢ ل م

٢ (ل - م)² = (ل + م)² - ٤ ل م

٣ ل² م² = (ل م)²

٤ ل³ + م³ = (ل + م) [(ل + م)² - ٣ ل م]

٥ ١/ل + ١/م = (ل + م)/(ل م)

مثال (١) كون المعادلة التربيعية التي جذراها ٣ ، ٥

الحل

مجموع الجذرين = ٣ + ٥ = ٨

حاصل ضرب الجذرين = ٣ × ٥ = ١٥

∴ المعادلة هي

س² - ٨ س + ١٥ = ٠

مثال (٢) كون المعادلة التي جذراها ٢ + √٣ ، ٢ - √٣

الحل

مجموع الجذرين = (٢ + √٣) + (٢ - √٣)

= ٤

حاصل ضرب الجذرين = (٢ + √٣)(٢ - √٣)

= ٤ - ٣ = ١

∴ المعادلة هي

س² - ٤ س + ١ = صفر

مثال (٣) كون المعادلة التي جذراها ٢ت ، -٢ت

الحل

مجموع الجذرين = ٢ت + (-٢ت) = صفر

حاصل ضرب الجذرين = ٢ت × (-٢ت) = -٤ت²

= -٤ × -١ = ٤

∴ المعادلة هي

س² - صفر س + ٤ = ٠

س² + ٤ = ٠

مثال (٤) ل ، م هما جذرا المعادلة س² + ٣ س - ١ = ٠ كون المعادلة التي جذراها م/ل ، ل/م

الحل

أولاً : من المعادلة المعطاة

ل + م = -ب/أ = -٣/١ = -٣

ل م = جـ/أ = -١/١ = -١

ثانياً : من جذري المعادلة المطلوبة

مجموع الجذرين = م/ل + ل/م = (ل² + م²)/(ل م)

= ((ل + م)² - ٢ ل م)/(ل م) = ((-٣)² - ٢ × -١)/-١

= (٩ + ٢)/-١ = -١١

حاصل ضرب الجذرين = م/ل × ل/م = ١

∴ المعادلة هي س² + ١١ س + ١ = ٠

مثال (٥) إذا كان الفرق بين جذري المعادلة ٦ س² - ٧ س + ١ = ك هو ١١/٦ أوجد قيمة ك

الحل

٦ س² - ٧ س + ١ - ك = صفر

بفرض أن جذري المعادلة هما ل ، م

∴ من المعادلة المعطاة

ل + م = $\frac{٧}{٦}$ ① ، ل م = $\frac{١ - ك}{٦}$

∴ ل − م = $\frac{١١}{٦}$ معطى ②

بحل المعادلتين ① ، ② معاً بالجمع

ل + م = $\frac{٧}{٦}$ ← ①

ل − م = $\frac{١١}{٦}$ ← ②

بالجمع

٢ل = $\frac{١٨}{٦}$ ⇐ ٢ل = ٣

$\boxed{ل = \frac{٣}{٢}}$ بالتعويض فى ①

$\frac{٣}{٢}$ + م = $\frac{٧}{٦}$ ⇐ م = $\frac{٧}{٦}$ − $\frac{٣}{٢}$

∴ $\boxed{م = \frac{-١}{٣}}$

∴ جذرى المعادلة هما $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-١}{٣}$

بالتعويض فى المعادلة بأحد الجذرين

∴ ٦ ($\frac{٣}{٢}$)^{٢} − ٧ × $\frac{٣}{٢}$ + ١ = ك

∴ $\boxed{ك = ٤}$

مثال (٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} − ٤س + ٢ = ٠ كون المعادلة التى جذريها ل + ١ ، م + ١

الحل

أولاً من المعادلة المعطاة

ل + م = $\frac{٤}{١}$ = ٤ ، ل م = $\frac{٢}{١}$ = ٢

ثانياً : من جذرى المعادلة المطلوبة

مجموع الجذرين = ل + ١ + م + ١

= ل + م + ٢

= ٤ + ٢ = $\boxed{٦}$

حاصل ضرب الجذرين = (ل + ١) (م + ١)

= ل م + ل + م + ١ = ٢ + ٤ + ١ = $\boxed{٧}$

∴ المعادلة هى س^{٢} − ٦س + ٧ = ٠

مثال (٧) إذا كان $\frac{ل}{٣}$ ، $\frac{م}{٣}$ هما جذرا المعادلة س^{٢} − ٢س + ٥ = ٠ كون المعادلة التى جذراها ل ، م

الحل

أولاً : من المعادلة المعطاة

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$

$\frac{ل}{٣}$ + $\frac{م}{٣}$ = $\frac{٢}{١}$

$\frac{ل + م}{٣}$ = $\frac{٢}{١}$ ⇐ $\boxed{ل + م = ٦}$ (نضرب مقص)

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ل}{٣}$ × $\frac{م}{٣}$ = $\frac{ج}{أ}$

$\frac{ل م}{٩}$ = $\frac{٥}{١}$ ⇐ $\boxed{ل م = ٤٥}$

∴ المعادلة المطلوبة س^{٢} − ٦س + ٤٥ = ٠

مثال (٨) كون المعادلة التى يزيد كل من جذريها بمقدار واحد عن أحد جذرى المعادلة س^{٢} − ٧س − ٩ = ٠

الحل

أولاً : من المعادلة المعطاة

ل + م = $\frac{٧}{١}$ = ٧ ، ل م = $\frac{-٩}{١}$ = −٩

ثانياً : من جذرى المعادلة المطلوبة

مجموع الجذرين = ل + ١ + م + ١ = ل + م + ٢

= ٧ + ٢ = $\boxed{٩}$

حاصل ضرب الجذرين = (ل + ١) (م + ١)

= ل م + ل + م + ١ = −٩ + ٧ + ١ = −١

∴ المعادلة هى س^{٢} − ٩س − ١ = صفر

مثال (٩) إذا كان ل ، م جذرا المعادلة س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠ أوجد قيمة

(١) ل − م (٢) ل^{٢} − ٣ل + ٥

الحل من المعادلة المعطاة

ل + م = $\frac{٣}{١}$ = ٣ ، ل م = $\frac{٢}{١}$ = ٢

[١] (ل − م)^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٤ ل م

= (٣)^{٢} − ٤ × ٢ = ٩ − ٨ = [١]

∴ ل − م = $\sqrt{١}$ = ± ١

[٢] ل^{٢} − ٣ ل + ٥ = (ل^{٢} − ٣ ل + ٢) + ٣

= صفر + ٣ = ٣

مثال (١٠) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} + ٣ س − ٧ = ٠ كون المعادلة التي جذراها (ل + ٢)^{٢} ، (م + ٢)^{٢}

الحل

أولاً : من المعادلة المعطاة

ل + م = $\frac{-٣}{١}$ = −٣ ، ل م = $\frac{-٧}{١}$ = −٧

ثانياً : من جذري المعادلة المطلوبة

مجموع الجذرين = (ل + ٢)^{٢} + (م + ٢)^{٢}

= ل^{٢} + ٤ ل + ٤ + م^{٢} + ٤ م + ٤

= (ل^{٢} + م^{٢}) + ٤ (ل + م) + ٨

= (ل + م)^{٢} − ٢ ل م + ٤ (ل + م) + ٨

= (−٣)^{٢} − ٢ × −٧ + ٤ × −٣ + ٨

= ٩ + ١٤ − ١٢ + ٨ = [١٩]

ضرب الجذرين = (ل + ٢)^{٢} (م + ٢)^{٢}

= [(ل + ٢)(م + ٢)]^{٢}

= [ل م + ٢ ل + ٢ م + ٤]^{٢}

= [ل م + ٢ (ل + م) + ٤]^{٢}

= [−٧ + ٢ × −٣ + ٤]^{٢} = [−٩]^{٢} = ٨١

∴ المعادلة هي

س^{٢} − ١٩ س + ٨١ = صفر

مثال (١١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠ فكون المعادلة التي جذراها ل^{٣} ، م^{٣}

الحل

أولاً : من المعادلة المعطاة

ل + م = ٣ ، ل م = ٢

ثانياً : من جذري المعادلة المطلوبة

مجموع الجذرين = ل^{٣} + م^{٣}

= [ل + م] [(ل + م)^{٢} − ٣ ل م]

= (٣) ((٣)^{٢} − ٣ × ٢)

= ٣ × ٣ = [٩]

حاصل ضربهم = ل^{٣} × م^{٣} = (ل م)^{٣}

= (٢)^{٣} = ٨

∴ المعادلة هي س^{٢} − ٩ س + ٨ = ٠

[٦] الواجب السادس :

[١] أكمل ما يأتي :-

[١] المعادلة التربيعية التي مجموع جذريها −١ وحاصل ضربهم −٥ هي .....

[٢] المعادلة التربيعية التي جذراها ٣ ، ٥ هي ...

[٣] إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} − ٥ س + ٤ = ٠ فإن ل + م = ... ، ل م = ... ، ل^{٢} + م^{٢} = ...

[٤] إذا كان أ ، أ^{٢} هما جذرا المعادلة ٢ س^{٢} + ب س + ٥٤ = ٠ فإن ب = ...

[٥] إذا كان ل ، $\frac{٢}{ل}$ هما جذرا المعادلة أ س^{٢} + ب س + ١٢ = ٠ فإن أ = ...

[٢] كون المعادلة التربيعية التي جذراها :-

① −٢ ، ٤ ② ٧ + ٣$\sqrt{٥}$ ، ٧ − ٣$\sqrt{٥}$

③ ١ − ٢ت ، ١ + ٢ت

④ $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ت}{١ - ت}$ ⑤ −٥ت ، ٥ت

[٣] إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} − ٧ س + ٥ = ٠ فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

جبر

① $ل^2م + م^2ل$ ② $\frac{1}{م} + \frac{1}{ل}$

③ $(ل-2)(م-2)$ ④ $ل^2 + م^2$

⑤ $ل - م$ ⑥ $ل^2 - 4ل + 7$

⑦ $2م^2 - 8م + 15$

---

④ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^2 - 2س + 1 = 0$ فكون المعادلة التي جذراها $ل + 3$ ، $م + 3$

---

⑤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^2 - 3س - 5 = 0$ فكون المعادلة التي جذراها $5ل$ ، $5م$

---

⑥ إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $س^2 - 7س + 4 = 0$ فكون المعادلة التي جذراها $(ل+م)$ ، $(ل م)$

---

⑦ إذا كان $ل + 2$ ، $م + 2$ جذرى المعادلة $س^2 - 11س + 3 = 0$ فأوجد المعادلة التي جذراها ل ، م

---

⑧ إذا كان ل ، م جذرى المعادلة $3س^2 - 5س + 2 = 0$ أوجد المعادلة التي جذراها $\frac{ل^2}{م}$ ، $\frac{م^2}{ل}$

---

⑨ كون المعادلة التربيعية التي كل جذر من جذريها يساوى ضعف نظيره من جذرى المعادلة $4س^2 - 12س + 7 = 0$

شغل دماغك

إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ حيث $أ \neq 0$ يساوى ضعف مجموع معكوس هذين الضربيين إثبت أن $جـ^2 (ب^2 - 4 أ جـ) = 4 أ^2 ب^2$

أولى ثانوى

إختبار (1)

(على تكوين المعادلة التربيعية)

1 أكمل ما يأتى :-

① المعادلة التي جذراها 1 ، 4 هى .....

② المعادلة التربيعية التي جذراها ت ، -ت هى ....

③ المعادلة التربيعية التي جذراها متساويان وكل منهما = 1 هى .....

④ إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $س^2 - 3س + 4 = 0$ فإن القيمة العددية للمقدار $ل^2 + م^2$ = ...

---

2 إختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :-

① إذا كان س = -1 أحد جذرى المعادلة $س^2 + ب س + 2 = 0$ فإن ب = ...

[-1 ، -3 ، 2 ، 3]

② المعادلة التربيعية التي جذراها $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ هى

.... [$س^2 + 4$ ، $س^2 + 2 = 0$ ، $س^2 - 2 = 0$ ، $س^2 - \sqrt{2}س + 2 = 0$]

③ ل ، م هما جذرا المعادلة $س^2 - 5 = 0$ فإن $ل + م$ = ...

[1 ، 5 ، -5 ، صفر]

④ مجموعة حل المعادلة $س^2 + 3 = 0$ فى ح هى ....

[± 3 ، $\pm \sqrt{3}$ ، $\pm \sqrt{3}$ ت ، 9]

---

3 (أ) كون المعادلة التي جذراها 6 ، -6

(ب) كون المعادلة التربيعية التي جذراها -9 ت ، 9 ت

---

4 (أ) ل ، م هما جذرا المعادلة $س^2 + 2س - 6 = 0$ فأوجد المعادلة التي جذراها $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

(ب) ل ، م جذرا المعادلة $س^2 + 3س + 3 = 0$ فكون المعادلة التي جذراها $ل + 5$ ، $م + 5$

---

5 إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $2س^2 - 8س + 4 = 0$ فكون المعادلة التي جذراها ضعف جذرى المعادلة المعطاة

إختبار (٢)

١ أكمل ما يأتي :-

① المعادلة التي جذراها ٣ت ، -٣ت هي ....

② ل ، م هما جذري المعادلة $س^2 - ٥س + ٤ = ٠$
فإن ل - م = ...

③ مجموع جذري المعادلة $٣س^2 - ١٥ = ٠$ هو
..... وحاصل ضربهم = ...

④ المعادلة التي جذراها $(١ + ت)^2 (١ - ت)$
هي .....

٢ إختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

① إذا كان ل ، $ل^2$ هما جذرا المعادلة
$٢س^2 + بس + ٥٤ = ٠$ فإن ب = ...
[٣ ، -٣ ، ١٢ ، -٢٤]

② ل ، م هما جذرا المعادلة $س^2 - ٥س + ٤ = ٠$
فإن $ل^3 + م^3$ = ... [٥ ، ٤٤ ، ٦٥ ، $\frac{٥}{٤}$]

③ إذا كان ل = ٢ + ٣ت ، م = ٢ - ٣ت
فإن $ل^2 + م^2$ = ... [١٠ ، -١٠ ، ±١٠ ، ٤]

④ المعادلة التربيعية التي جذراها $٢ + ت^2$ ، $٢ - ت^2$
هي .... [$س^2 + ٣ = ٠$ ، $س^2 + ٤س - ٣ = ٠$ ،
$س^2 - ٤س + ٣ = ٠$ ، $س^2 - ٤س - ٤ = ٠$]

٣ ل ، م هما جذري المعادلة $س^2 + ٣س + ٤ = ٠$
أوجد المعادلة التي جذراها $\frac{ل}{٢}$ ، $\frac{م}{٢}$

٤ إذا كان ل - ١ ، م - ١ هما جذري المعادلة
$س^2 - ٣س - ٦ = ٠$ أوجد المعادلة التي
جذراها ل ، م

٥ إذا كان ل ، م هما جذري المعادلة
$س^2 - ٣س - ١ = ٠$ حيث ل > م كون المعادلة
التي جذراها ٣ل - ٢م ، ٢ل - ٣م

إختبار (٣)

١ أكمل ما يأتي :-

① المعادلة التي جذراها ٣ ، ٠ هي .....

② المعادلة التي جذراها $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ هي .....

③ إذا كان ٢ ، -١ هما جذرا المعادلة
$س^2 + بس + جـ = ٠$ فإن ب = ...

④ إذا كان ٢ ، -٣ هما جذرا المعادلة
$س^2 + بس + جـ = ٠$ فإن جـ = ...

٢ أ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة
$٤س^2 - ٦س + أ = ٠$ وكان $ل^2 + م^2 = ٧ل م$
أوجد قيمة أ

ب إذا كان الفرق بين جذري المعادلة $٣س^2 - ٢س + جـ = ٠$
يساوي الفرق بين جذري المعادلة $٢س^2 - جـ س + ٣ = ٠$
إثبت أن $٩جـ^2 + ٤٨جـ - ٢٣٢ = ٠$

٣ أ كون المعادلة التربيعية التي جذراها
$\frac{أ - ب}{أ + ب}$ ، $\frac{أ + ب}{أ - ب}$

ب إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^2 - ٦س + هـ = ٠$
وكان $(ل - م)^2 = هـ + ٢١$ أوجد قيمة هـ ثم
أوجد المعادلة التي جذراها $\frac{١}{ل^2}$ ، $\frac{١}{م^2}$

٤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة
$أس^2 + بس + جـ = ٠$ وكان جذرا
المعادلة $أَس^2 + بَس + جَ = ٠$ هما
(ل + ن) ، (م + ن) إثبت أن
$أَ^2 (بَ^2 - ٤أَجَ) = أ^2 (ب^2 - ٤أجـ)$

٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة
$أس^2 + ٢بس + جـ = ٠$ ، ل > م ،
ل - م = ٢ إثبت أن $ن^2 = أ(أ + جـ)$

٦ الدرس السادس

(إشارة الدالة)

بحث إشارة الدالة هو تحديد قيم س التي تكون عندها الدالة (موجبة - سالبة - تساوي صفر)

١ إشارة الدالة الثابتة :-

الصورة العامة لها د(س) = أ

حيث أ ∈ ح مثل د(س) = ٣ ، د(س) = $\frac{-١}{٥}$

⇐ إشارتها دائماً حسب إشارة أ

فمثلاً :

د(س) = -٥ سالبة دائماً في ح

د(س) = $\sqrt{٢}$ موجبة دائماً في ح

د(س) = صفر دائماً = صفر

٢ إشارة الدالة الخطية :-

الصورة العامة لها $\boxed{د(س) = ب س + جـ}$

* إشارتها مثل إشارة س عندما س > $\frac{-جـ}{ب}$ ، س ∈] $\frac{-جـ}{ب}$ ، ∞ [

* إشارتها عكس إشارة س عندما س < $\frac{-جـ}{ب}$ حيث س ∈] -∞ ، $\frac{-جـ}{ب}$ [

* د(س) = صفر عند س = $\frac{-جـ}{ب}$

خطوات الحل :-

① نضع د(س) = صفر

② نحل المعادلة ونوجد قيمة س

③ نحدد إشارة الدالة كالآتي

مثل إشارة س | صفر | عكس إشارة س

-∞ ∞

$\frac{-جـ}{ب}$

مثال (١) إبحث إشارة الدالة

د(س) = ٣س - ١٢ الحل

٣س - ١٢ = ٠

٣س = ١٢ ⇐ س = $\frac{١٢}{٣}$ = ٤

مثل | صفر | يخالف

-∞ ∞

+ + + + + ٤ - - - - -

∴ د(س) موجبة عند س > ٤

∴ د(س) سالبة عند س < ٤

∴ د(س) = صفر عند س = ٤

مثال (٢) إبحث إشارة الدالة

د(س) = ٧ - ٣س الحل

٧ - ٣س = ٠

-٣س = -٧ ⇐ $\boxed{س = \frac{٧}{٣}}$

مثل | صفر | يخالف

-∞ ∞

- - - - $\frac{٧}{٣}$ + + + +

∴ د(س) سالبة عندما س > $\frac{٧}{٣}$

∴ د(س) موجبة عندما س < $\frac{٧}{٣}$

∴ د(س) = صفر عندما س = $\frac{٧}{٣}$

٣ إشارة الدالة التربيعية :-

صورتها العامة $\boxed{أ س^٢ + ب س + جـ = صفر}$

١ إذا كان المميز (ب^٢ - ٤أجـ) > صفر موجبة

∴ المعادلة لها حلان {أ ، ب}

∴ إشارة الدالة كالآتي

← مثل إشارة أ^٢ عند س ∈ ح - [أ ، ب]

← عكس إشارة أ^٢ عند س ∈] أ ، ب [

← د(س) = صفر عند س ∈ {أ ، ب}

٢ إذا كان المميز (ب^٢ - ٤أجـ) = صفر

∴ المعادلة لها حل وحيد {أ}

وتكون إشارة الدالة كالآتي

← مثل إشارة $س^2$ عند $س \in ح - \{أ\}$

← د(س) = صفر عند س = أ

٣ إذا كان المميز ($ب^2 - 4أجـ$) < صفر سالب :-

∴ الدالة ليس لها جذور حقيقية

← وتكون إشارة الدالة مثل إشارة $س^2$ دائماً

مثال (١) عين إشارة الدالة

د(س) = $س^2 - س - 6$ الحل

$س^2 - س - 6 = 0$

(س + ٢)(س − ٣) = ٠

س = −٢ ، س = ٣ (حلان)

مثل | صفر | يخالف | صفر | مثل

∞− ← + + + | −٢ | − − − | ٣ | + + + → ∞

∴ د(س) موجبة عند $س \in ح - [-2 ، 3]$

∴ د(س) سالبة عند $س \in]-2 ، 3[$

∴ د(س) = صفر عند $س \in \{-2 ، 3\}$

مثال (٢) عين إشارة الدالة

د(س) = $س^2 - 2س + 1$ موضحاً على خط الأعداد الحل

$س^2 - 2س + 1 = 0$

(س − ١)(س − ١) = ٠

∴ س = ١ (حل وحيد)

مثل | صفر | مثل

∞− ← + + + + | ١ | + + + + → ∞

∴ د(س) موجبة عندما $س \in ح - \{1\}$

∴ د(س) = صفر عندما س = ١

مثال (٣) عين إشارة الدالة

د(س) = $3س - س^2$ الحل

$3س - س^2 = 0$

س(٣ − س) = ٠

س = ٠ ، س = ٣

مثل | صفر | يخالف | صفر | مثل

∞− ← − − − − | ٣ | + + + | صفر → ∞

∴ د(س) سالبة عندما $س \in ح - [0 ، 3]$

∴ د(س) موجبة عندما $س \in]0 ، 3[$

∴ د(س) = صفر عندما $س \in \{0 ، 3\}$

مثال (٤) ابحث إشارة الدالة

د(س) = $س^2 + س + 1$ ممثلاً الحل على خط الأعداد إن أمكن الحل

$س^2 + س + 1 =$ صفر

لا يحلل (نستخدم القانون العام)

أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ١

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$

$س = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, ت}{2}$

∴ $س \notin ح$

∴ إشارة د(س) موجبة على ح

مثال (٥) ارسم منحنى الدالة

د(س) = $س^2 - 4س + 3$ متخذاً $س \in [0 ، 4]$

ومن الرسم عين إشارة الدالة في ح

الحل نكون الجدول التالي أولاً يدوياً أو باستخدام الآلة الحاسبة

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	٣	٠	−١	٠	٣

الواجب السابع ٧

[١] أكمل ما يأتى :-

١ الدالة د(س) = -٤ تكون سالبه فى .....

٢ الدالة د(س) = ٣س - ٢ موجبة فى .....

٣ الدالة د(س) = ٣س تكون سالبة فى .....

٤ الدالة د(س) = س² - ٢٥ سالبة فى .....

٥ الدالة د(س) = س² + ٩ سالبة فى .....

٦ الدالة د حيث د(س) = س² - ٦س + ٩ موجبة فى الفترة .....

٧ الدالة د حيث د(س) = -(س - ١)(س + ٣) موجبة فى الفترة .....

[٢] ابحث إشارة كلاً من الدوال الآتيه فى ح :-

١ د(س) = ٤ ، ٢ د(س) = -√٢

٣ د(س) = ٣س + ٧ ، ٤ د(س) = ٣ - ¼ س

٥ د(س) = ٢س² + ٥س - ٧

٦ د(س) = س² - ٤س + ٣

٧ د(س) = ٤س - ٧ - س²

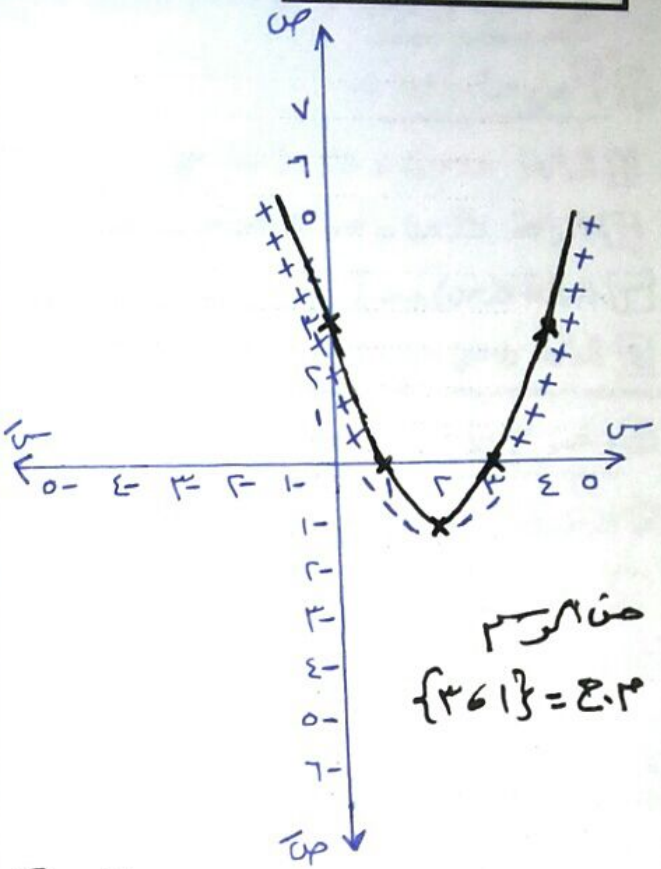
٨ د(س) = { س + ١ عندما س ≤ -١ ، -س - ١ عندما س > ١

[٣] ارسم منحنى الدالة د : د(س) = ٦س - ٥ - س² فى الفترة [٠ ، ٦] ومن الرسم عين إشارة الدالة فى ح

[٤] إذا كانت : د(س) = س² - ٥س + ٦ ، ر(س) = ٢س² - ٥س - ١٨ فعين متى تكون الدالتان د ، ر موجبتين معاً أو سالبتين معاً

وإذا غامرت فى شرفٍ مرومٍ ∴

∴ فلا ترضى بما دون النجوم



من الرسم

م.ج = {١ ، ٣}

∴ د(س) موجبة عندما س ∈ ح - [١ ، ٣]

∴ د(س) سالبة عندما س ∈]١ ، ٣[

∴ د(س) = صفر عندما س ∈ {١ ، ٣}

مثال (٦) إذا كان د(س) = س - ٣ ، ر(س) = ٥ + ٤س - س² عين الفترة التى فيها الدالتان موجبتان معاً

الحل أولاً س - ٣ = ٠ ، س = ٣

∴ د(س) موجبة عند س > ٣ (١)

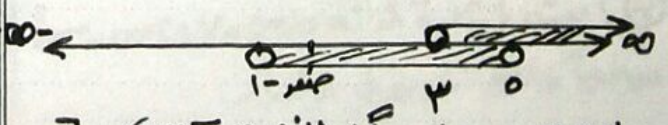
ثانياً ٥ + ٤س - س² = ٠

س² - ٤س - ٥ = ٠

(س - ٥)(س + ١) = ٠

س = ٥ ، س = -١

∴ ر(س) موجبة عند س ∈]-١ ، ٥[



∴ الدالتان موجبتان معاً فى الفترة]٣ ، ٥[

إختبار (١) (على بحث إشارة الدالة)

١ أكمل ما يأتي :-

١ الدالة د(س) = -٢ إشارتها .....

٢ الدالة د(س) = س - ٢ موجبة في .....

٣ الدالة د(س) = س² - ٦س + ٩ موجبة في ...

٤ الدالة د(س) = ١٢ + ٤س - س² سالبة في .....

٢ إختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :-

١ الدالة د(س) = -٤ سالبة في .....

[ ]-∞ ، ٤[،]-٤ ، ٤[، ح ، ح - {٤}]

٢ د(س) = ٣س سالبة في .....

[ ]-∞ ، ٣[،]٣ ، ∞[،]-∞ ، ٠[، [ ]

٣ د(س) = س² - ٩ سالبة عندما س ∈ .....

[ح - [-٣ ، ٣] ،]-٣ ، ٣[،]-∞ ، -٩[،]-∞ ، -٣[ ]

٤ الدالة د(س) = أ س² + ب س + جـ يكون لها إشارة واحدة في ح عندما .....

[ب² - ٤أجـ = ٠ ، أ > ٠ ، أ = ٠ ، ب² - ٤أجـ < ٠]

٣ (أ) عين إشارة الدالة د(س) = -٥س + ١٠

(ب) إبحث إشارة الدالة د(س) = س² - س - ١٢ موضحاً ذلك على خط الأعداد

٤ (أ) إبحث إشارة الدالة د(س) = ٢س موضحاً ذلك على خط الأعداد

(ب) إرسم منحنى الدالة د(س) = -س² + ٤س - ٤ في الفترة [٠ ، ٤] ومن الرسم عين إشارة الدالة في ح

٥ (أ) عين إشارة الدالة د(س) = ٥س - س² موضحاً ذلك على خط الأعداد

(ب) إبحث إشارة الدالة د(س) = ٧ + ٢س - س² موضحاً ذلك على خط الأعداد

إختبار (٢)

١ أكمل ما يأتي :-

١ إشارة الدالة د(س) = (-٣)^صفر هي .....

٢ الدالة د(س) = -(س - ٢)(س + ٥) موجبة في الفترة .....

٣ إشارة الدالة د(س) = (٢ - س)² تكون ..... دائماً

٤ إذا كانت د : [-٢ ، ٤] ← ح حيث د(س) = ٢ - س إشارتها سالبة في .....

٥ د(س) = ٣س - ٦ تكون سالبة عند س < ....

٦ د(س) = -٢ تكون سالبة في .....

٧ د(س) = ٢ - ٢/٣ س موجبة في .....

٨ د(س) = س² - ٤ سالبة لكل س ∈ .....

٢ (أ) إرسم منحنى الدالة د : حيث د(س) = -س² + ٨س - ١٥ في الفترة [١ ، ٧] ثم عين إشارة الدالة في ح من الرسم

(ب) إبحث إشارة الدالة د(س) = { س - ٦ ، س ≥ ٦ ؛ -س - ٦ ، س < ٦ }

٤ وضح على خط الأعداد إشارة كلاً من الدالتين د(س) = س - ٣ ، ر(س) = س² - ٩ ثم أوجد الفترات التي تكون فيها الدالتين موجبتين معاً وسالبتين معاً

٥ إثبت أن لجميع قيم س ∈ ح يكون جذراً للمعادلة ٢س² - ك س + ك + ٣ = ٠ حقيقيين مختلفين

شغل دماغك

إدرس إشارة الدالة

د(س) = -٢س² - ١٢√٢ س - ١

٧ الدرس السابع

حل متباينة الدرجة الثانية فى مجهول واحد

* خطوات حل المتباينة التربيعية فى ح

١ نحول المتباينة إلى معادلة صفرية
٢ نوجد قيمة س (قيم س)
٣ نبحث إشارة الدالة
٤ نحدد فترات الدالة موجبة وسالبة

مثال (١) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة $س^٢ + ٥س - ٦ < ٠$

الحل $س^٢ + ٥س - ٦ = ٠$

$(س + ٦)(س - ١) = ٠$

$س = -٦$ ، $س = ١$

مثل | صفر | يخالف | صفر | مثل
$-\infty$ ، ∞
+ + + | -٦ | - - - | ١ | + + + +

مجموعة حل المتباينة < صفر أى الجزء السالب ∴ م.ح =]-٦ ، ١[

مثال (٢) حل المتباينة $٢س^٢ - ٣س + ٥ \geq$ صفر

الحل غير قابلة للتحليل نستخدم المميز

$ب^٢ - ٤أجـ = ٩ - ٤ \times ٢ \times ٥$

$= -٣١$

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

∴ الدالة موجبة دائماً

∴ المتباينة ≥ صفر

∴ م.ح = ϕ

مثال (٣) أوجد فى ح حل المتباينة $(س + ٥)(س - ١) \leq س + ٥$

الحل $س^٢ + ٥س - س - ١ - س - ٥ \leq ٠$

$س^٢ + ٣س - ١٠ \leq ٠$

$(س - ٢)(س + ٥) \leq ٠$

$س = ٢$ ، $س = -٥$

مثل | صفر | يخالف | صفر | مثل
$-\infty$ ، ∞
+ + + + | -٥ | - - - | ٢ | + + + +

∴ د(س) موجبة فى ح - [-٥ ، ٢]

∴ د(س) سالبة فى ح]-٥ ، ٢[

∴ د(س) = صفر عند {-٥ ، ٢}

∴ م.ح = ح -]-٥ ، ٢[

مثال (٤) حل المتباينة $س^٢ + ٢س + ٤ < ٠$

الحل المميز = $ب^٢ - ٤أجـ$

$= ٤ - ٤ \times ١ \times ٤$

$= ٤ - ١٦$

$= -١٢$ < صفر

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

∴ إشارة الدالة موجبة دائماً

∴ م.ح = ح

مثال (٥) حل المتباينة فى ح $١٠س - ٢٥ < س^٢$

الحل

$-س^٢ + ١٠س - ٢٥ <$ صفر بالضرب × (-١)

$س^٢ - ١٠س + ٢٥ >$ صفر

جـ ٢ ل

(س − ٥)(س − ٥) = صفر

س = ٥ ، س = ٥

مثل | صفر | مثل

∞− ← − − − − − | − − − − − → ∞

٥

∴ د(س) سالبة في ح − {٥}

∴ د(س) = صفر عند س = ٥

∴ م.ح = ح − {٥}

مثال (٦) حل المتباينة

(س + ٣)² ≥ ١٠ − ٣(س + ٣)

الحل

س² + ٦س + ٩ ≥ ١٠ − ٣س − ٩

س² + ٦س + ٩ − ١٠ + ٣س + ٩ ≥ ٠

س² + ٩س + ٨ ≥ ٠

(س + ٨)(س + ١) ≥ ٠

س = −٨ ، س = −١

مثل | صفر | يخالف | صفر | مثل

∞− ← + + + | − − − | −٨ + + + | → ∞

−١

∴ د(س) موجبة في ح − [−٨ ، −١]

∴ د(س) سالبة في]−٨ ، −١[

∴ د(س) = صفر عند {−٨ ، −١}

∴ م.ح = [−٨ ، −١]

مثال (٧) أوجد مجموعة حل المتباينة

س² ≤ ٩ **الحل**

س² − ٩ ≤ ٠

(س + ٣)(س − ٣) ≤ ٠

س = −٣ ، س = ٣

أولى ثانوي

مثل | صفر | يخالف | صفر | مثل

∞− ← + + + | − − − | −٣ + + + | → ∞

٣

∴ د(س) موجبة في ح − [−٣ ، ٣]

∴ د(س) سالبة في]−٣ ، ٣[

د(س) = صفر عند {−٣ ، ٣}

∴ م.ح = [−٣ ، ٣]

مثال (٨) أوجد قيمة ك التي تجعل مجموعة حل المتباينة

س² − ك س + ١٢ > ٠ هي ح − [٣ ، ٤]

الحل س² − ك س + ١٢ = ٠

موجبة عندما س ∈ ح − [٣ ، ٤]

∴ العدد ٤ يحقق د(س) = ٠

(٤)² − ك(٤) + ١٢ = ٠

١٦ − ٤ك + ١٢ = ٠

−٤ك + ٢٨ = ٠

−٤ك / −٤ = ٢٨ / −٤

ك − ٧ = ٠ ⇐ ك = ٧

فكر (شغل دماغك)

أوجد مجموعة حل المتباينة:

١٠ > س² + ٢س − ٥ ≥ ٣ في ح

٨ الواجب الثامن

١ أكمل ما يأتي

① مجموعة حل المتباينة (س − ٢)(س − ٥) < ٠ في ح هي .....

② مجموعة حل المتباينة س(س − ١) > ٠ في ح هي .....

③ مجموعة حل المتباينة $س^2 + 9 > 0$ في ح هي .....

④ مجموعة حل المتباينة $س^2 + 9 < 0$ في ح هي .....

⑤ مجموعة حل ~~المعادلة~~ المتباينة $س^2 + 1 \leq 0$ في ح هي .....

⑥ مجموعة حل المتباينة $-س(س+2) \leq 0$ في ح هي .....

٢ أوجد مجموعة حل كلاً من المتباينات الآتية في ح :

① $س^2 + 2س - 8 > 0$

② $6س - س^2 - 9 \leq 0$

③ $2س - س^2 < 0$

④ $(س-2)^2 \leq 9$

⑤ $5 - 2س \leq س^2$

⑥ $5س^2 + 12س \geq 44$

٣ عين إشارة الدالة د : حيث $د(س) = س^2 - 5س + 6$

٤ عين إشارة $د(س) = \frac{2}{3}س - 7$

٥ لرسم منحنى الدالة $د(س) = س^2 + 2س + 3$ في الفترة $[-2 ، 4]$ ومن الرسم أوجد في ح

١ مجموعة حل المعادلة $د(س) = 0$

٢ مجموعة حل المتباينة $د(س) \leq 0$

٣ مجموعة حل المتباينة $د(س) > 0$

٦ ابحث إشارة الدالة $س^2 + 9 \leq$ صفر

إختبار (١) (على حل المتباينة التربيعية)

١ أكمل ما يأتي

① مجموعة حل المتباينة $س(س-1) > 0$ في ح هي ....

② مجموعة حل المتباينة $-س(س+2) \geq 0$ في ح هي ....

③ مجموعة حل المتباينة $س^2 + 25 > 0$ في ح هي ....

④ مجموعة حل المتباينة $س^2 + 1 \leq 0$ في ح هي ....

٢ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

(أ) $س^2 - 1 \leq 0$

(ب) $س^2 - 4س + 4 \geq 0$

٣ أوجد مجموعة حل المتباينة في ح

(أ) $2س - س^2 < 0$

(ب) $-س^2 - 10س - 25 \geq 0$

٤ أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية في ح

(أ) $3س - 6 \leq$ صفر

(ب) $(س-2)^2 \leq -5$

٥ أوجد مجموعة حل كلاً من المتباينات الآتية في ح

(أ) $س(س+2) - 3 \leq 0$

(ب) $3س^2 \leq 11س + 4$

(جـ) $\frac{4}{3}س - \frac{3}{2} <$ صفر

(د) $3(س - \frac{1}{2}) > 4$

جيل

إختبار (٢)

١ أكمل ما يأتي :-

١ مجموعة حل المتباينة س (س-٣) > ٠ في ح هي .....

٢ مجموعة حل المتباينة س^{٢} + ١٦ > ٠ في ح هي .....

٣ مجموعة حل المتباينة س^{٢} + س - ٢ < ٠ في ح هي .....

٤ إذا كانت د : [-٤ ، ٦] ← ح حيث د(س) = ٣ - س فإن إشارة الدالة موجبة في .....

٢ (أ) إبحث إشارة الدالة د :

د(س) = ٢س^{٢} + ٧س - ١٥ ومن ذلك إستنتج مجموعة حل المتباينة ٢س^{٢} + ٧س ≤ ١٥

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة

١٥س^{٢} + ٧س - ٢ ≤ ٠

٣ أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية في ح

(أ) س^{٢} - ٨س + ١٦ > ٠

(ب) س^{٢} - ٤س + ٤ < ٠

٤ إذا كان ح - [ب ، جـ] هي مجموعة حل المتباينة س^{٢} + ب س + جـ > ٠ فأوجد قيمة كل من ب ، جـ حيث ب ، جـ ∈ ح

٥ (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة في ح

٣ - ٢س ≤ س^{٢}

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة

س (س - ١) < ٢٠

أولى ثانوي

إختبار عام على الجبر

١ أكمل ما يأتي :-

١ إذا كانت س = ١ أحد جذري المعادلة س^{٢} - ب س + ٣ = ٠ فإن قيمة ب = ... والجذر الآخر هو .....

٢ إذا كان أحد جذري المعادلة (٥ - أ) س^{٢} + (١٠ - أ) س + ٥ = ٠ هو معكوس ضربي للآخر فإن أ = ...

٣ الدالة د(س) = ١٠ - ٥س تكون سالبة عند ....

٤ إذا كان جذرا المعادلة ٣س^{٢} - ٦س + ك = ٠ مركبين فإن ك > .....

٢ (أ) إبحث إشارة الدالة د(س) = -٢س^{٢} + ١١س - ١٥ موضحاً الحل على خط الأعداد

(ب) حل المتباينة في ح س^{٢} - ٣س + ٧ < ٠

٣ (أ) إذا كانت س = ٣ + ت ، ص = $\frac{٢ + ت}{ت}$ فأوجد قيمة س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢} على صورة عدد مركب حيث ت^{٢} = -١

(ب) حل في ح المتباينة

(س + ٣)^{٢} - (س + ٣) > ٠

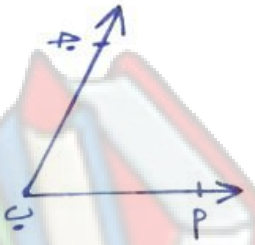
٤ (أ) إذا كان ل ، م جذري المعادلة ٢س^{٢} + ٣س - ٥ = ٠ فأوجد المعادلة التي جذراها $\frac{١}{ل^{٢}}$ ، $\frac{١}{م^{٢}}$

(ب) إرسم منحنى الدالة د(س) = -س^{٢} + ٨س - ١٥ في الفترة [٢ ، ٦] ثم عين إشارتها من الرسم

٥ إذا كانت $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ جذري المعادلة س^{٢} - ٦س + ٤ = ٠ فأوجد المعادلة التي جذراها (ل + م) ، (ل م)

1 الدرس الأول :-

الزاوية الموجهة



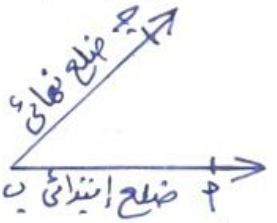
الزاوية ← هى إتحاد شعاعين لهما نفس نقطه البداية التى تسمى رأس الزاوية

ويسمى $\overrightarrow{بأ}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ضلعى الزاوية والنقطة ب تسمى رأس الزاوية

وتقرأ الزاوية كالآتى

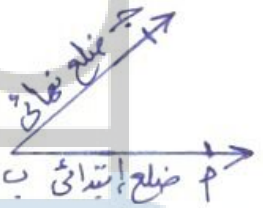
د أ ب جـ أو د جـ ب أ أو د ب

ولكن إذا أخذنا إتجاه الزاوية يعين الاعتبار نجد الحالتين التاليتين



$(\overrightarrow{بأ} ، \overrightarrow{بجـ})$

ويعبر هذا الزوج المرتب عن الزاوية الموجهه د أ ب جـ



$(\overrightarrow{بجـ} ، \overrightarrow{بأ})$

يعبر هذا الزوج المرتب عن الزاوية الموجهه د جـ ب أ

لاحظ فى الحالتين السابقتين أن الزاويتين لهما نفس المقدار (القياس) ولكن مختلفين فى الاتجاه

لذلك فإن $(\overrightarrow{بأ} ، \overrightarrow{بجـ}) \neq (\overrightarrow{بجـ} ، \overrightarrow{بأ})$

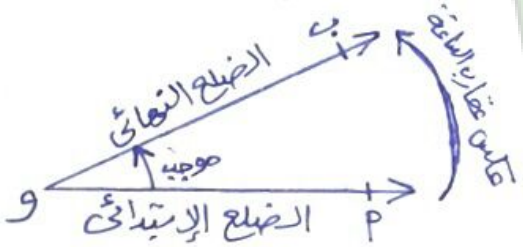
أى أن د أ ب جـ (الموجهة) ≠ د جـ ب أ (الموجهة)

الزاوية الموجهة :-

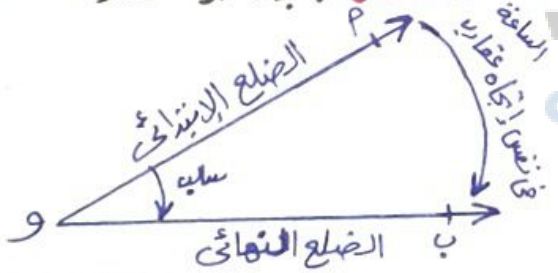
هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ولهما نفس نقطة البداية وهى رأس الزاوية

القياس الموجب والسالب للزاوية الموجهة

1 الزاوية الموجهة تكون موجبة عندما يكون إتجاه السهم من الضلع الإبتدائى إلى الضلع النهائى **عكس** إتجاه حركة عقارب الساعة



2 الزاوية الموجهة تكون سالبة إذا كان إتجاه السهم من ضلعها الإبتدائى إلى ضلعها النهائى فى **نفس** إتجاه حركة عقارب الساعة



* لكل زاوية موجهة قياسان أحدهما موجب والآخر سالب بحيث مجموع القيمتين المطلقتين للقياسين = ٣٦٠°

← للتحويل من القياس السالب إلى القياس الموجب نضيف دورة كاملة (٣٦٠°) أو أكثر من دورة

← للتحويل من القياس الموجب إلى القياس السالب نطرح دورة كاملة (٣٦٠°) أو أكثر من دورة

* ضع كلاً مما يأتى فى صورة قياس موجب

$-١٢٠ \Leftarrow -١٢٠ + ٣٦٠ = ٢٤٠^\circ$

$-٤٠ \Leftarrow -٤٠ + ٣٦٠ = -٤٠ + ٣٦٠$

$= ٣٢٠^\circ$

* حول كلاً مما يأتى إلى قياس سالب

$١٥٧^\circ \Leftarrow ١٥٧^\circ - ٣٦٠^\circ = -٢٠٣^\circ$

$٢٠^\circ \Leftarrow ٢٠^\circ - ٣٦٠^\circ = ١٦٠^\circ - ٣٦٠^\circ$

$= -٢٠٠^\circ$

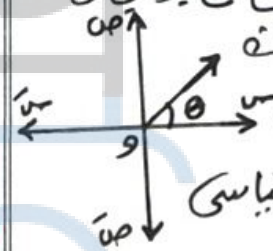
الوضع القياسى للزاوية الموجهة :-

← يقال أن الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

[١] ضلعها الابتدائى يقع على الاتجاه الموجب لمحور السينات

[٢] رأسها هو نقطة الأصل

← الزاوية θ فى الوضع القياسى



الزوايا المكافئة :-

(هى الزوايا الموجهة التى تكون فى الوضع القياسى ولها جميعاً نفس الضلع النهائى)

فإذا كانت θ زاوية موجهة فى الوضع القياسى فإنه يكافئها جميع الزوايا التى تحقق العلاقة

$\boxed{\theta \pm ن \times ٣٦٠}$

حيث $ن \in \{١، ٢، ٣، ٤، \ldots\}$

بسيطة لكى تحصل على زاوية مكافئة لزاوية تضيف أو تطرح أى عدد من الدورات (٣٦٠°) مرة أو أكثر

مثال (١) أوجد زاويتين أحدهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب تكافئ الزاوية ١٠٠°

الحل

زاوية بقياس موجب

$١٠٠^\circ + ٣٦٠^\circ = ٤٦٠^\circ$

زاوية بقياس سالب

$١٠٠^\circ - ٣٦٠^\circ = -٢٦٠^\circ$

مثال (٢) عين أصغر قياس موجب لكل من الزوايا الآتية

(١) $-٦٢^\circ \Leftarrow -٦٢^\circ + ٣٦٠^\circ = ٢٩٨^\circ$

(٢) $٥٧٠^\circ \Leftarrow ٥٧٠^\circ - ٣٦٠^\circ = ٢١٠^\circ$

(٣) $-٧٨١^\circ \Leftarrow -٧٨١^\circ + ٣٦٠^\circ = -٤٢١^\circ$

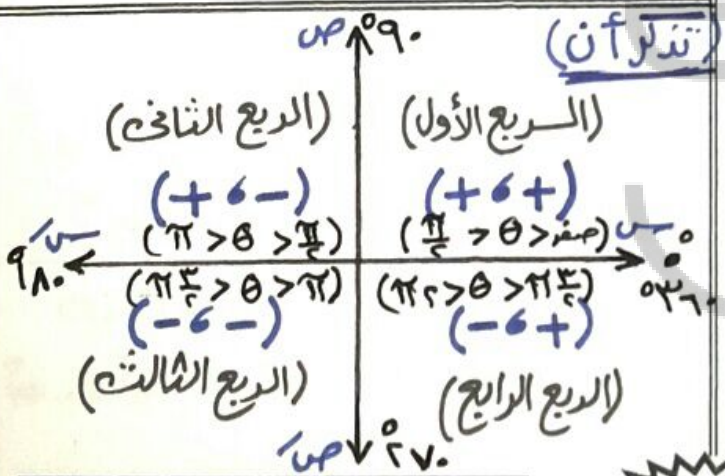
$-٤٢١^\circ + ٣٦٠^\circ = -٦١^\circ + ٣٦٠^\circ$

$= ٢٩٩^\circ$

أو (حل آخر)

$-٧٨١ + ٣٦٠ \times ٣ = ٢٩٩^\circ$

(تذكر أن)



مثال (٣) حدد الربع الذى تقع فيه كلاً من الزوايا الآتية

١ ٥٣° (فى الربع الأول)

٢ −١٢٠° ⇐ نحولها أولاً لزاوية موجبة أقل من (٣٦٠°)

−١٢٠° + ٣٦٠° = ٢٤٠° (الربع الثالث)

٣ −١١π/٦ ⇐ نظبط نشكلها أولاً حيث π = ١٨٠°

−١٨٠/٦ = −٣٠° + ٣٦٠° = ٣٣٠°

(تقع فى الربع الرابع)

٤ ١٧٩° ٥٩َ تقع فى الربع الثانى

٥ ١٧٩° ٦٠َ = ١٨٠° تقع على الاتجاه السالب لمحور السينات

لاحظ الزوايا (٠، ٩٠، ١٨٠، ٢٧٠، ٣٦٠°) تسمى زوايا ربعية وهى الزوايا الفاصلة بين كل ربع والآخر

١ الواجب الأول

١ أكمل ما يأتى

١ الزاوية الموجهة هى .....

٢ تكون الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى إذا كان .....

٣ الزاوية الموجهة التى قياسها θ° يكون

قياسها السالب هو .....

٤ الزاوية الموجهة التى قياسها (−θ°) يكون قياسها الموجب .....

٥ الزاوية التى قياسها −٣٠° تكافئها زاوية سالبة قياسها ..... وتكافئها زاوية موجبة قياسها .....

٦ الزاوية التى قياسها ٨٩° ٦١َ تقع فى الربع .....

٧ الزاوية التى قياسها −١١π/٥ تقع فى الربع .....

٨ إذا كانت النقطة (س، −٥، ٢) تقع على محور الصادات فإن س = ...

٢ عين أصغر قياس موجب لكل من الزوايا الآتية وعين الربع الذى تقع فيه :

١ −٥٦° ٢ ٦٠٠° ٣ −٢١٥°

٤ −٨َ ٤٧° ٥ −٢٤π/٩ °

٣ لكل مما يأتى أوجد زاويتين تكافئهم أحدهما موجبة والآخر سالبة :

١ −١٢٣° ٢ ١٤٠°

٤ عين الربع الذى تقع فيه كلاً من الزوايا الآتية :

١ ٢٣° ٢ ٢١٧° ٣ −١٨٠°

٤ ٢٦٩° ٥٩َ ٥ ١٧٩° ٥٩َ ٦٠َ

٥ موضحاً بالرسم ضع كلاً من الزوايا الآتية فى الوضع القياسى : ٥٤° ، −٧٠° ، −١٧٠°

الدرس الثانى :-

القياس الستينى والدائرى للزاوية

١ القياس الستينى للزاوية (θ°) :-

هو قياس الزاوية بالدرجة والدقيقة والثانية حيث

الدرجة = ٦٠ دقيقة

والدقيقة = ٦٠ ثانية

⇐ ويمكن تحويل أجزاء الزاوية إلى دقائق وثوانى بالآلة الحاسبة كالآتى

$٥٣٫٣٧٥^{\circ} = ٥٣^{\circ}\ ٢٢'\ ٣٠''$

وتكتب كالآتى

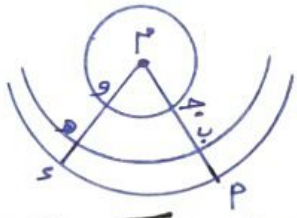
$53^{\circ}\ 22'\ 30''$ [DMS] [=] 53.375

٢ القياس الدائرى للزاوية (θ^{rad}) :- ($\theta^{ء}$)

⇐ ثلاثة دوائر متحدة المركز فى م

نلاحظ أن $\frac{\text{طول } \widehat{وج}}{م و} = \frac{\text{طول } \widehat{هب}}{م هـ} = \frac{\text{طول } \widehat{ءد}}{م ء}$

= مقدار ثابت



⇐ وهذا المقدار الثابت هو قيمة القياس الدائرى للزاوية المركزية م

القياس الدائرى = $\frac{\text{طول القوس}}{\text{طول نصف القطر}} = \frac{ل}{نق}$

⇐ وحدة قياس الزاوية فى القياس الدائرى هى الزاوية النصف قطرية ويرمز لها بالرمز ١ء (واحد دائرى) (راديان)

تعريف الزاوية النصف قطرية

هى الزاوية المركزية فى الدائرة التى تحصر قوساً طوله يساوى طول نصف قطر الدائرة

$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{نق}{نق} = ١ء$

تذكر هذه العلاقة جيداً

العلاقة بين القياس الدائرى والستينى :-

① للتحويل من دائرى لستينى ($\times \frac{١٨٠}{\pi}$)

$\theta^{\circ} = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠}{\pi}$

② للتحويل من ستينى لدائرى ($\times \frac{\pi}{١٨٠}$)

$\theta^{ء} = \theta^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠}$

حيث (π) فى الحالتين = $\frac{٢٢}{٧}$

وتكتب على الآلة (π) [X10^x] [Shift]

مثال (١) أوجد القياس الدائرى للزاوية التى قياسها يساوى ٧٥° ٣٢' ١٥" مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية

الحل

$\theta^{ء} = \theta^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠}$

$= ٧٥^{\circ}\ ٣٢'\ ١٥'' \times \frac{\pi}{١٨٠}$

$= ١٫٣١٨ء$

تكتب على الآلة كالآتى

75 [DMS] 32 [DMS] 15 [DMS] [X] [Shift] [X10^x] / 180

= 1,318

مثال (٢) أوجد القياس الستينى للزاوية التى قياسها الدائرى ٢٫٣٨ ء

الحل

$\theta^\circ = \theta^ء \times \frac{١٨٠}{\pi}$

$= ٢٫٣٨ \times \frac{١٨٠}{\pi}$ ووو

$\theta^\circ = ١٣٦^\circ\ ٢١'\ ٥٠''$

2.38 [×] 180 / [Shift] [×10^x] [=] ووو

$= 136^\circ\ 21'\ 50''$

مثال (٣) عين الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة لكل من الزوايا الآتية:

[١] ٢٫٠٢ ء $= ٢٫٠٢ \times \frac{١٨٠}{\pi}$ ووو

$= ١١٥^\circ\ ٤٤'\ ١٤''$ (فى الربع الثانى)

[٢] −٦٫٥ ء $= -٦٫٥ \times \frac{١٨٠}{\pi}$ ووو

$= -٢٢٢٥٫٤٢ + ٣٧٢ \times ٣٦٠$ ووو

(لتحويلها إلى قياس موجبه)

$= ٣٤٧^\circ\ ٣٤'\ ٣٨''$

تقع فى الربع الرابع

مثال (٤) أوجد طول القوس الذى تحصره زاوية مركزية قياسها ١٥٢° ٢٦' ١٧'' مرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٠٫٥ سم مقرباً الناتج لأقرب سنتيمتر

الحل

← نوجد أولاً القياس الدائرى

$\theta^ء = ١٥٢^\circ\ ٢٦'\ ١٧'' \times \frac{\pi}{١٨٠} = ٢٫٦٦٠٥$

∴ $ل = \theta^ء \times نق = ٢٫٦٦٠٥ \times ١٠٫٥$

$= ٢٨$ سم

مثال (٥) أوجد القياس الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ١٢٫٦ سم فى دائرة نصف قطرها ٧٫٢ سم

الحل

$\theta^ء = \frac{ل}{نق} = \frac{١٢٫٦}{٧٫٢} = ١٫٧٥$ ء

تحوله لقياس ستينى بالضرب × $\frac{١٨٠}{\pi}$

$\theta^\circ = ١٫٧٥ \times \frac{١٨٠}{\pi} =$ ووو $= ١٠٠^\circ\ ١٦'\ ٣''$

مثال (٦) أوجد محيط الدائرة ومساحتها التى بها زاوية محيطية قياسها ٣٠° يقابلها قوس طوله ٥ سم

الحل

∵ قياس الزاوية المحيطية = ٣٠°

∴ قياس زاويتها المركزية (المضعف) = ٦٠°

تحولها للدائرى ← $\theta^ء = ٦٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}$ ء

∴ $نق = \frac{ل}{\theta^ء} = \frac{٥}{\frac{\pi}{٣}} = ٤٫٧٧$ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٤٫٧٧

= ٣٠ سم

∴ مساحة الدائرة = π نق² = π × (٤٫٧٧)²

= ٧١٫٤٨ سم²

مثال (٧) زاويتان مجموع قياسهما ٧٠° والفرق بينهما $\frac{٢}{٥}$ π أوجد قياسهما بالتقدير الستينى والدائرى.

الحل

نفرض أن الزاويتان هما س°، ص°

س + ص = ٧٠° ← (١)

س − ص = ٣٦° ← (٢)

بالجمع

$\frac{٢س}{٢} = \frac{١٠٦}{٢}$ ⇐ س = ٥٣°

بالتعويض فى (١) ٥٣° + ص = ٧٠°

حساب مثلثات

ص = ٧٠ − ٥٣ = ١٧°

∴ قياس الزاويتان بالتقدير الستينى هما ٥٣°، ١٧°

نحولهم إلى قياس دائرى بالضرب × $\frac{\pi}{١٨٠}$

٥٣° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٠٫٩٢٥ ء

١٧° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٠٫٢٩٧ ء

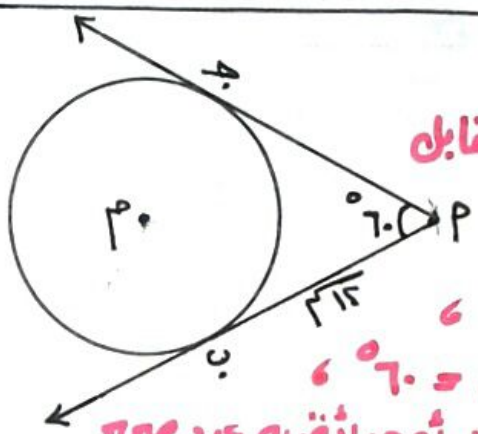
مثال (٨)

فى الشكل المقابل

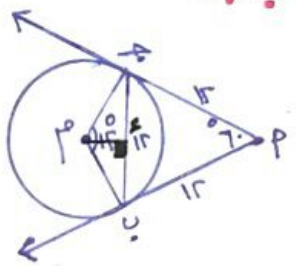
أب ، أجـ مماسان للدائرة م ،

ق(∠ب أجـ) = ٦٠° ،

أب = ١٢ سم أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر ب جـ



الحل



من هندسة الشكل نجد أن Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع

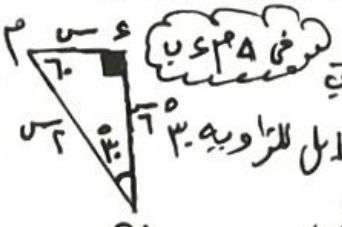
∴ ب جـ = ١٢ سم

ق(∠ب م جـ) = ١٢٠° = ٢ ق(∠أ جـ ب) المحاطية

مركزية

نرسم م ء ⊥ جـ ب

⇐ تذكر أن [الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوى ½ طول الوتر



فى Δ م ء ب

نفرض م ء = س سم ∴ م ب = ٢س سم

من فيثاغورث

ء ب = √((٢س)² − (س)²)

٣٦ = ٤س² − س²

$\frac{٣س^٢}{٣}$ = $\frac{٣٦}{٣}$ ⇐ س² = ١٢

أولى ثانوى

∴ س = √١٢ = ٢√٣

∴ م ب = ٢س = ٤√٣ = (نق)

∴ طول ب جـ = θ° × نق

= (١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠}$) × ٤√٣

= ١٤٫٥١ سم

نوجد محيط الدائرة = ٢π نق

= ٢ × π × ٤√٣ = ٤٣٫٥٣ سم

∴ (محيط) ب جـ الأكبر = محيط الدائرة − طول (ب جـ) الأصغر طوله

= ٤٣٫٥٣ − ١٤٫٥١

≃ ٢٩ سم

الواجب الثانى

١ أكمل ما يأتى :-

١ الزاوية التى قياسها الستينى ٤٣° ٢١ قياسها الدائرى يساوى .....

٢ الزاوية التى قياسها $\frac{٢٨\pi}{٣}$ قياسها الستينى يساوى .....

٣ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى يساوى .....

٤ طول القوس فى دائرة طول قطرها ١٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٩٠° يساوى .....

٥ إذا كان إحدى زوايا مثلث = ٧٥° وزاوية أخرى $\frac{\pi}{٣}$ فإن القياس الدائرى للزاوية الثالثة تساوى .....

٦ زاوية مركزية فى دائرة تقابل قوساً طوله يساوى ضعف طول نصف قطر الدائرة فإن قياسها بالتقدير الستينى = ...

٢ أوجد القياس الستينى والدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوساً (ل) وطول نصف قطرها (نق) فى كلاً من الحالات الآتية

١ ل = ١٥ سم ، نق = ٧ سم

٢ ل = ١٢ سم ، نق = ٢٠ سم

٣ ل = ١٢٢ سم ، نق = ٦ سم

٣ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية $\theta = ١٢\frac{٩}{٨}$ ، ل = ٢٢,٥ سم

٣ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية $\theta = ٧٦٧$ و٤ ، ل = ٨ و٦ سم

٤ أوجد لأقرب جزء من مائة طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) = ١٥ سم ، ويقابل زاوية مركزية قياسها $\theta = ٦^{\circ}\ ٥٨'\ ١٠٤^{\circ}$

٥ أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ١٢ سم يقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥°

٦ إذا كان قياس زاوية مركزية فى دائرة يساوى ١٠٥° وتحصر قوساً طوله $٢٢\frac{٧}{٢}$ سم أوجد طول قطر الدائرة

٧ شكل رباعى قياس إحدى زواياه $\frac{١١}{٦}$ ء وقياس زاوية أخرى منه $٢\frac{٤}{٩}$ ء وقياس زاوية ثالثة منه ٤٥° أوجد القياس الستينى والدائرى لزاويته الرابعة

٨ زاويتان متكاملتان الفرق بينهم ٢ و٤ ء أوجد قياس كلاً منهم بالتقدير الستينى والدائرى .

← القياس الموجب للزاوية التى يصنعها عقربا الساعة مع عقربا الدقائق عند الساعة الثانية ونصف تماماً يساوى ..... ء [تشغل دماغك]

إختبار (١) (على الدرس الأول والثانى)

١ أكمل ما يأتى :-

① الزاوية التى قياسها ٥٠° تكافئ زاوية سالبة قياسها .....

② الزاوية التى قياسها −٧٤٠° تقع فى الربع .....

③ أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها −٦١٠° هو .....

④ الزاوية التى قياسها $\frac{٢١٩}{٤}$ تقع فى الربع ....

⑤ القياس الستينى لزاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها ٦ سم وتقابل قوساً طوله ٣ سم يساوى .....

⑥ القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٣ سم فى دائرة طول قطرها ٤ سم يساوى ....

⑦ الزاوية المنصفة لقطرية قياسها الستينى = ...

⑧ إذا كانت النقطة (٤ ، ٧ − ٢ص) تقع على محور السينات فإن ص = ...

٢ ⓐ أوجد زاويتان أحدهما موجبة والأخرى سالبة تكافئان الزاوية التى قياسها −١٣٢°

ⓑ عين الربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها ١١٢° ١٤'

٣ أوجد طول القوس المقابل لزاوية محيطية قياسها ١٢٠° فى دائرة نصف قطرها ٦ سم

٤ Δ س ص ع فيه ق(س) = ٦٠° ، ق(ص) = ٨٠° أوجد ق(ع) بالتقدير الدائرى

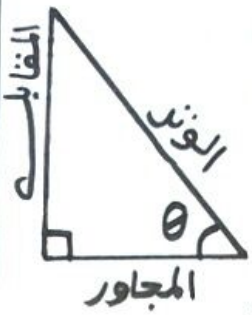
٥ زاويتان مجموعهم ١١٠° والفرق بينهم $\frac{١١}{٩}$ أوجد قياس كلاً منهم بالتقدير الدائرى .

٣ الدوال المثلثية (ومقلوباتها)

الدرس الثالث

في Δ القائم إذا كانت θ زاوية حادة

فإن



الدوال المثلثية الأساسية

جا θ =	المقابل / الوتر
جتا θ =	المجاور / الوتر
ظا θ =	المقابل / المجاور

* مقلوبات الدوال المثلثية

1. قاطع تمام الزاوية (قتا)

قتا θ = $\frac{1}{\text{جا } \theta}$ (مقلوب جا) = الوتر / المقابل

2. قاطع الزاوية (قا)

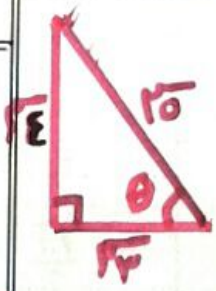
قا θ = $\frac{1}{\text{جتا } \theta}$ (مقلوب جتا) = الوتر / المجاور

3. ظل تمام الزاوية (ظتا)

ظتا θ = $\frac{1}{\text{ظا } \theta}$ = $\frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta}$ (مقلوب ظا)

= المجاور / المقابل

مثال (١) في الشكل المقابل



أوجد جا θ = $\frac{٤}{٥}$

جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ،

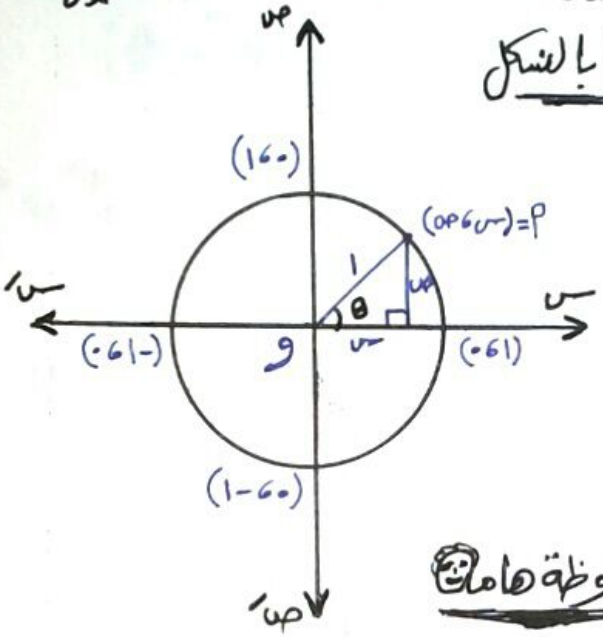
ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

قتا θ = $\frac{٥}{٤}$ ، قا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

* دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و(٠،٠) وطول نصف قطرها الوحدة (١) وحدة طول

كما بالشكل



ملحوظة هامة

إذا كانت النقطة (س، ص) ∈ دائرة الوحدة

فإن $\boxed{\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1}$ من نظرية فيثاغورث

ونلاحظ أيضاً

$\boxed{\text{س} = \text{جتا } \theta}$ ، $\boxed{\text{ص} = \text{جا } \theta}$

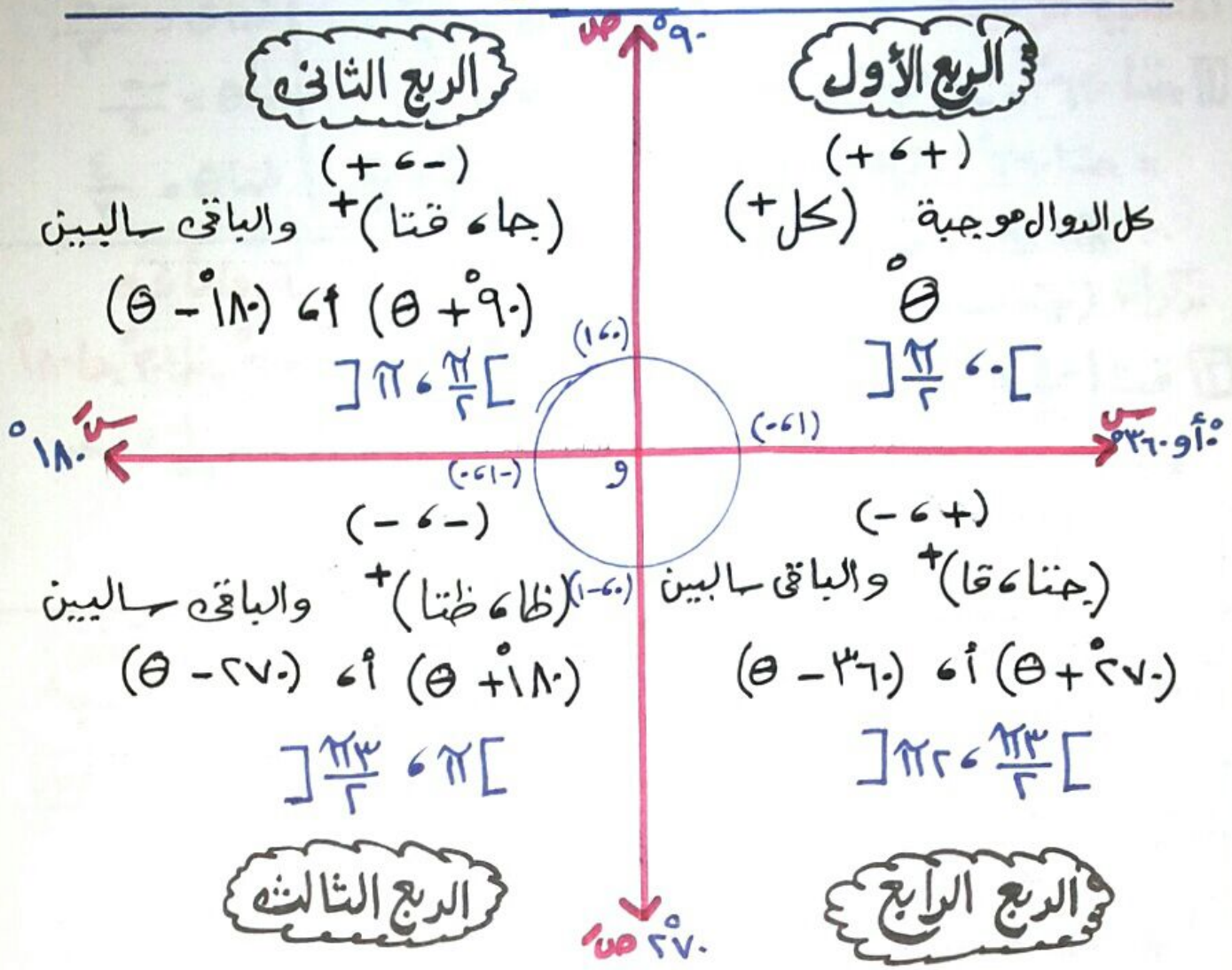
$\boxed{\text{ظا } \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta}}$ س ≠ ٠

أي أن أ = (س، ص) = (جتا θ ، جا θ)

مثال (٢) إذا كان الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٢، ٣) فإن

ظا θ = ٢ ، جتا θ = ٣ ، ظا θ = $\frac{٢}{٣}$

* هام جداً ملخص على دائرة الوحدة [إشارات الدوال المثلثية]



من الرسمة السابقة نستنتج **النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة**

قياس زاوية θ	إحداثي النقطة	جا θ	جتا θ	ظا θ
٠° أو ٣٦٠°	(١ ، ٠)	٠	١	٠
٩٠°	(٠ ، ١)	١	٠	غير معرف
١٨٠°	(-١ ، ٠)	٠	-١	٠
٢٧٠°	(٠ ، -١)	-١	٠	غير معرف
٣٠°	(√٣/٢ ، ١/٢)	١/٢	√٣/٢	١/√٣
٦٠°	(١/٢ ، √٣/٢)	√٣/٢	١/٢	√٣
٤٥°	(١/√٢ ، ١/√٢)	١/√٢	١/√٢	١

مثال (٣) عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية

[١] جتا ٦٢٠° = جتا (٦٢٠° − ٣٦٠°)

= جتا ٢٦٠° تقع في الربع الثالث

∴ جتا ٢٦٠° = جتا ٦٢٠ (سالبة)

تذكر أن (جتا سالبة في الربع الثالث)

[٢] ظتا (−٨/٥ π) = ظتا (−٢٨٨)

= ظتا (−٢٨٨ + ٣٦٠) = ظتا ٧٢°

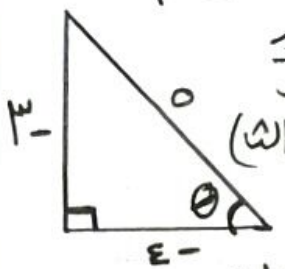
في الربع الأول

∴ ظتا ٧٢° = ظتا (−٨/٥ π) (موجبة)

لاحظ أن: الدوال المثلثية للزوايا المتكافئة لها نفس الإشارة.

مثال (٤) إذا كانت ١٨٠° < θ < ٢٧٠° وكانت: جتا θ = −٤/٥ فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية θ

الحل ① أولا نرسم مثلث قائم ونضع θ كما بالشكل ونضع الأطوال المعطاة (النسبة المعطاة) على الرسم



جتا θ = −٤/٥ = مجاور / وتر

١٨٠° < θ < ٢٧٠° (ربع ثالث)

∴ الإشارات (−، −)

② نحسب المقابل من فيثاغورث

المقابل = √(٥² − ٤²) = √٩ = ٣

③ نضع الإشارات حسب الربع الثالث (−، −) لاحظ أن الوتر دائما موجب

④ نوجد المطلوب

جا θ = −٣/٥ | قتا θ = −٥/٣

جتا θ = −٤/٥ | قا θ = −٥/٤

ظا θ = −٣/−٤ = ٣/٤ | ظتا θ = ٤/٣

مثال (٥) أوجد قيمة ما يأتي

٤ جا ٣٠° جا ٩٠° − جتا ٠° ظا ٦٠° − ظا ٣٠° جا ١٨٠°

الحل = ٤ × ١/٢ × ١ − ١ × ٢ − ١/√٣ × صفر

= ٢ − ٢ − صفر

= صفر − صفر = صفر

مثال (٦) أوجد قيمة س التي تحقق: جا س قا ٤٥° = ظا² ٦٠° − ٢ جتا ٣٦٠°

حيث س ∈]٠°، ٩٠°[**الحل**

جا س × (√٢)² = (√٣)² − ٢ × ١

جا س × ٢ = ٣ − ٢

٢ جا س = ١ ⇐ جا س = ١/٢

∴ س = ٣٠°

مثال (٧) إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٢أ، ٣أ) حيث ٠ < θ < π/٢ أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة قا² θ − ظا² θ **الحل**

س² + ص² = ١

(٢أ)² + (٣أ)² = ١

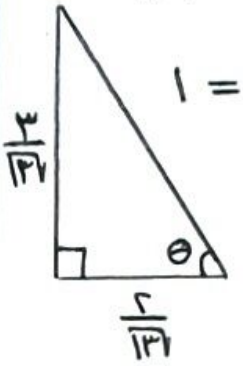
٤أ² + ٩أ² = ١ ⇐ ١٣أ² = ١

أ² = ١/١٣

$أ^2 = \frac{1}{13}$ ⇐ $أ = \sqrt{\frac{1}{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$

∴ النقطة هي $\left(\frac{2}{\sqrt{13}} ، \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

من فيثاغورث



الوتر $= \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2} = 1$

∴ $قا^2 θ - ظا^2 θ$

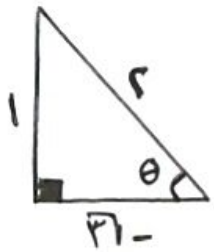
$= \left(\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{13}}}\right)^2 - \left(\frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}}\right)^2$

$= 1$

مثال (٨) إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي ، ب نقطة تقاطع النهائي مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ إذا كانت ب $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ، ص\right)$

الحل $جتا θ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

من فيثاغورث



المقابل $= \sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{4-3} = 1$

ب $(-، +)$ ∴ تقع في الربع الثاني

$حا θ = \frac{1}{2}$

$جتا θ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$ظا θ = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$قتا θ = \frac{1}{1} = 2$

$قا θ = \frac{-2}{\sqrt{3}}$

$ظتا θ = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

الواجب الثالث [الدوال المثلثية]

١ أكمل ما يأتي :-

١ إذا كان θ في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ فإن حا θ = ... ، قتا θ = ...

جتا θ = ... ، قا θ = ...

ظا θ = ... ، ظتا θ = ...

٢ إشارة النسبة المثلثية جا ٦٣٠ هي .....

٣ إذا كان جا θ = -١ ، جتا θ = - فإن θ = ...°

٤ $ظتا^2 ٣٠° - قا^2 ٦٠° + قتا^2 ٤٥°$ = ...

٥ $حا\left(-\frac{12}{5}\pi\right)$ = ...

٦ حا ٠° + جتا ٠° + ظا ٠° = ...

٧ إذا كان حا θ = $\frac{-1}{2}$ ، جتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن θ تقع في الربع .....

٨ إذا كان حا θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن θ = ... ، جتا θ = ... ، ظا θ = ...

٢ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ التي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ك في كلاً من الحالات الآتية

١ ك = (٦ ، ص) ص > ٠

٢ ك = (-أ ، -أ)

٣ ك = $\left(\frac{3}{2}أ ، -أ\right)$

٣ أوجد قيمة س حيث س ∈ [٠° ، ٩٠°]

حيث حا س = حا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ قتا ٣٠

i Like Maths

٤ إثبت صحة المتطابقات الآتية

① جتا² ٣٠° ظتا² ٦٠° ظا ٤٥° = $\frac{1}{4}$

② جتا $\frac{\pi}{2}$ = جتا² $\frac{3\pi}{4}$ − جا² $\frac{3\pi}{4}$

③ ٣ ظا² ٣٠° + $\frac{4}{3}$ جتا ٣٠° − $\frac{1}{4}$ ظتا ٤٥° قتا² ٣٠° = ١

٥ إذا كان θ ∈]$\frac{\pi}{2}$ ، π[، جا θ = $\frac{12}{13}$

فأوجد قيمة ما يأتي

١ جميع الدوال المثلثية للزاوية θ

٢ قتا θ جا θ − ظا θ ظتا θ + جتا² θ

٦ إذا كانت θ ∈]$\frac{3\pi}{2}$ ، ٢π[، جا θ = $\frac{-24}{25}$ فأوجد

① $\frac{\text{ظتا θ − قتا θ}}{\text{ظا θ − قا θ}}$

② جتا θ − قتا θ ظا θ

شغل دماغك

إذا كانت θ ∈]$\frac{\pi}{2}$ ، π[

فأوجد قيمة θ حيث

٣ قتا² θ = ٩ جا θ قتا θ

إختبار (١) (على الدوال المثلثية)

١ أكمل ما يأتي :-

١ إذا كان قا θ = ٢ حيث θ حادة موجبة

فإن θ = ...

٢ إذا كان جا θ < ٠ ، جتا θ > ٠ فإن

θ تقع في الربع .....

٣ إذا كان ٢ جتا θ = −$\sqrt{2}$ فإن قياس أقل زاوية موجبة تحقق ذلك هي .....

٤ إذا كانت θ حادة حيث جتا (θ + ٢٥°) = جا ٣٠°

فإن θ = ...

٢ إختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :-

١ أي من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها سالبين .... [٣٠° ، ١٢٠° ، ٢٢٠° ، ٣٠٥°]

٢ ظا ٤٥° + ظا ٤٠° = ... [١ ، −١ ، ٢ ، ٠]

٣ جا ٢٠ = $\frac{1}{\dots}$ [قا ٢٠ ، ظا ٢٠ ، قتا ٢٠ ، $\frac{1}{20}$]

٤ قيمة المقدار $\frac{\text{٢ ظا θ ظتا θ}}{\text{٢ جا² θ + ٢ جتا² θ}}$ هي ....

[١ ، ٢ ، ٣ ، صفر]

٣ ① إذا كان جا θ = $\frac{3}{5}$ ، θ ∈]$\frac{\pi}{2}$ ، π[

فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ

ب بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

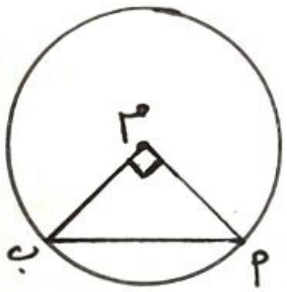
٣ جا ٣٠° جا ٦٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا ٤٥°

٤ في الشكل المقابل

إذا كانت

مساحة Δ أ م ب = ٨ سم²

فأوجد طول $\overset{\frown}{\text{أب}}$



٥ إذا كان θ ∈]$\frac{3\pi}{2}$ ، ٢π[،

جا θ = $\frac{-24}{25}$ فأوجد قيمة :

① جتا θ − قتا θ ظا θ

② ظتا θ − قا θ جا ١٨٠ + جتا²

الدرس الرابع

الزوايا المنتسبة

وهى أن تنسب الزاوية للربع الذى تقع فيه عن طريق تقسيمها حسب ربعها مع مراعاة إشارتها ويتم تقسيمها كما هو موضح فى رسمة دائرة الوحدة ص ٤١

ملحوظه إذا كانت θ زاوية سالبة $(-\theta)$ فإنها تكافئ $(٣٦٠^\circ - \theta)$

هام جداً

① زوايا لا تغير الدالة المثلثية وهى $[١٨٠^\circ ، ٣٦٠^\circ]$

جا $(١٨٠^\circ - \theta) \leftarrow$ جا θ

② زوايا تغير الدالة المثلثية وهى $[٩٠^\circ ، ٢٧٠^\circ]$

ويكون التغيير كالآتى

جا $\Leftrightarrow$ جتا

ظا $\Leftrightarrow$ ظتا

قا $\Leftrightarrow$ قتا

بمعنى [لو فيها حرف التاء يحذف ولو مفيهاش حرف التاء تضيفه]

مثال ١ أوجد قيمة كل من

١ جا ٢٤٠°

الحل

① ٢٤٠° تقع فى الربع الثالث فيمكن تقسيمها $(١٨٠^\circ + \theta)$ أو $(٢٧٠^\circ - \theta)$ يفضل إستخدام $(١٨٠^\circ + \theta)$ لأنها لا تغير الدالة المثلثية

∴ جا ٢٤٠° = جا $(\cancel{١٨٠^\circ} + ٦٠^\circ)$

② نشطب الزاوية الربعية ونضع الإشارة حسب الربع

جا فى الربع الثالث (سالبة)

$= -$ جا $٦٠^\circ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢ ظا (-١٥٠°)

أولاً نضبط شكل الزاوية بجعلها أصغر زاوية موجبة

$-١٥٠^\circ + ٣٦٠^\circ = ٢١٠^\circ$

ثانياً: نحدد الربع ونقسم

الربع الثالث $٢١٠^\circ = (١٨٠^\circ + ٣٠^\circ)$

ثالثاً: نشطب الزاوية الربعية ونضع الإشارة حسب الربع

ظا $(\cancel{١٨٠^\circ} + ٣٠^\circ)$ = ظا ٣٠° (موجبة)

$= \frac{١}{\sqrt{٣}}$

٣ قا $\frac{١٥\pi}{٤}$ $= قا\left(\frac{١٥ \times ١٨٠}{٤}\right) = قا ٦٧٥^\circ$

$= قا(٦٧٥^\circ - ٣٦٠^\circ) = قا ٣١٥^\circ$

$= قا(٣٦٠^\circ - ٤٥^\circ) = قا ٤٥^\circ$

$= +\sqrt{٢}$ (قا موجبة فى الربع الرابع)

مثال (٢) بدون إستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة ما يأتي

جتا(−١٥٠°) جا٦٠° + جتا $\frac{٢١٢}{٣}$° جا٣٣٠° − قا(−$\frac{٢٢٥}{٤}$°) ظا٩٠٠°

الحل ① نظبط الزوايا (موجبة وأقل من ٣٦٠°)

= جتا٢١٠° جا٢٤٠° + جتا١٢٠° جا٣٣٠° − قا٣١٥° ظا١٨٠°

② نقسم كل زاوية حسب ربعها

= جتا(١٨٠° + ٣٠°) جا(١٨٠ + ٦٠) + جتا(١٨٠° − ٦٠°) × جا(٣٦٠° − ٣٠°) − قا(١٨٠ − ٤٥°) ظا١٨٠

لاحظ الزوايا الحادة والربعية لا تقسم

③ نشطب الزاوية الربعية ونضع الإشارة حسب الربع

= −جتا٣٠° × −جا٦٠° − جتا٦٠° × −جا٣٠° − (−قا٤٥) × صفر

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + صفر

= $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

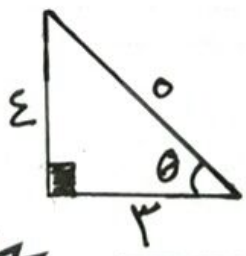
مثال (٣) إذا كان θ قياس زاوية حادة موجبة في الوضع القياسي تعين على دائرة الوحدة النقطة (−$\frac{٣}{٥}$ ، ص) فأوجد قيمة

① ظا(٩٠° − θ) + قا(٩٠° − θ)

② ظتا(٢٧٠° + θ) − ظا(٩٠° + θ) − جا(١٨٠° + θ)

الحل جتا θ = $\frac{٣}{٥}$

(+ ، +) في الربع الأول (حادة موجبة)



المقابل = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = ٤

① ظا(٩٠° − θ) + قا(٩٠° − θ)

= ظتا θ + قتا θ

= $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٥}{٤}$

= $\frac{٨}{٤}$ = ٢

لاحظ زاوية ٩٠° تغير الدالة

② ظتا(٢٧٠° + θ) − ظا(٩٠° + θ) − جا(١٨٠° + θ)

= −ظا θ − (−ظتا θ) − (−جا θ)

= −$\frac{٤}{٣}$ + $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{١٣}{٦٠}$

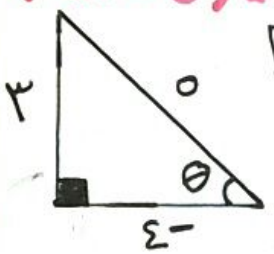
مثال ٤ إذا كانت جتا θ = $\frac{-٤}{٥}$ حيث ٩٠° < θ < ١٨٠° فأوجد قيمة كل من:

① جا(١٨٠° − θ) ② قا(٣٦٠° − θ)

③ جتا(−θ) ④ ظا(θ − ١٨٠°)

الحل المقابل = $\sqrt{٢٥ - ١٦}$ = ٣

الربع الثاني (− ، +)



① جا(١٨٠° − θ) = جا θ = $\frac{٣}{٥}$

② قا(٣٦٠° − θ) = قا θ = $\frac{-٥}{٤}$

③ جتا −θ = جتا θ = $\frac{-٤}{٥}$

④ ظا(θ − ١٨٠° + ٣٦٠°) = ظا(١٨٠° + θ)

= ظا θ = $\frac{-٣}{٤}$

ملحوظة هامة جداً إذا كانت θ زاوية حادة موجبة فإن

جا	−جا θ	جتا(−θ)	جتا θ
قتا	−قتا θ		قا θ
ظا	−ظا θ		
ظتا	−ظتا θ		

ولاحظ أيضاً (−θ) تقع في الربع الرابع

الواجب الرابع ٤ (الزوايا المنتسبة)

١ أكمل ما يأتى :-

① جا(θ - ٩٠°) = ...

② ظا(٢٧٠° - θ) = ...

③ $\frac{\text{جا}١٥°}{\text{ظا}٢٠°} \times \frac{\text{ظتا}٧٠°}{\text{جتا}٧٥°}$ = ...

④ جا ٣٠٠° = ...

⑤ إذا كان قتا θ = $\frac{٢}{٣٧}$ ، θ ∈]٠ ، $\frac{٣\pi}{٢}$[

فإن θ = ...

⑥ إذا كان ٥ جتا(٩٠° - θ) = ٤ ،

٠° < θ < ٩٠° فإن جا θ = ...

⑦ إذا كان ظا θ = $\frac{-٥}{١٢}$ ، جتا θ < ٠

فإن : قتا θ = ...

⑧ إذا كان : جا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، ظا θ > ٠ ،

فإن θ = ...

٢ أوجد قيمة كل مما يأتى :-

① جا(-١٥٠°) ② جتا(-٩٠٠°)

③ جا($\frac{-٢٤\pi}{٣}$) ④ ظتا ٧٨٠°

٣ أوجد قيمة كلاً مما يأتى :-

① جتا ١٢٠° + ظا ٢٢٥° + قتا ٣٣٠° + جتا ٤٢٠°

② جا ٦٩٠° جتا(-٢٤٠°) + جا ٥١٠° ظا ٨٥٥°

③ ظا $\frac{٢٢\pi}{٣}$ قا $\frac{٢١١\pi}{٣}$ + ظتا $\frac{٢١١\pi}{٦}$ قتا $\frac{١٩\pi}{٦}$

+ ظا $\frac{٢٢٥\pi}{٦}$ قتا($\frac{-٢١٩\pi}{٣}$)

٤ إثبت صحة كلاً مما يأتى :-

① جا ٤٨٠° جتا(-٦٠°) + جتا ٣٠٠° جا(-١٢٠°) = صفر

② جتا(-٣٠٠°) جا ٤٢٠° - جتا ٧٥٠° جتا ٦٦٠° = صفر

٥ إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة θ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ($\frac{٥\sqrt{٢}}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$) فأوجد الدوال المثلثية الآتية

① جا(٢٧٠° + θ) ② قتا(-θ)

③ ظتا(٩٠° - θ) ④ ظا(٣٦٠° - θ)

٦ إذا كان θ زاوية حادة موجبة فى الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب(س ، $\frac{٣}{٥}$) فأوجد قيمة

جا(٩٠° - θ) + ظا(٩٠° - θ) جتا(٩٠° + θ)

٧ إذا كان : جا θ = $\frac{\sqrt{٢٧}}{٢}$ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

فأوجد قيمة θ ثم أوجد

① قيمة $\frac{١ - ٢\,\text{ظتا}(٢٧٠° - \theta)}{١ + \text{جتا}^٢(٢٧٠° + \theta)}$

② إثبت أن : جتا ٢θ = $\frac{١ - \text{ظا}^٢(٢٧٠° - \theta)}{\text{قتا}^٢(٩٠° + \theta)}$

٨ إذا كان : ١٣ جا θ - ٥ = ٠ حيث

θ ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، ٢π[أوجد قيمة كل من :

قتا(٢٧٠° + θ) ، جتا(θ - ٢٧٠°) ، ظا(٢٧٠° + θ)

ثم إثبت أن :

جا(٢٧٠° - θ) × قا(٢٧٠° + θ) × ظتا(٢٧٠° + θ) = جا ٩٠°

٩ إذا كان الضلع النهائى للزاوية (٩٠° - θ) يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ($\frac{٥}{١٣}$ ، ص) فأوجد الدوال المثلثية للزاوية θ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

شغل دماغك أوجد قيمة ما يأتى

جا ٠° + جا ١° + جا ٢° + جا ٣° + ... + جا ٣٥٩° + جا ٣٦٠°

الدرس الخامس

المعادلات المثلثية

* القانون العام لحل المعادلات على الصور

حا θ = جتا β ، قا θ = قتا β

ظا θ = ظتا β

١ إذا كان حا θ = جتا β :

فإن θ ± β = ٩٠° + ٣٦٠° ن

أي أن θ ± β = π/٢ + ٢π ن

حيث ن ∈ ص (عدد صحيح)

٢ إذا كان : قتا θ = قا β :

فإن θ ± β = ٩٠° + ٣٦٠° ن

أي أن θ ± β = π/٢ + ٢π ن

حيث θ ≠ ن π ، β ≠ (٢ن + ١) π/٢

٣ إذا كان : ظا θ = ظتا β :

فإن : θ + β = ٩٠° + ١٨٠° ن

أي أن : θ + β = π/٢ + π ن

θ ≠ (٢ن + ١) π/٢ ، β ≠ ن π

مثال (١) أوجد الحل العام للمعادلة :

جتا ٢θ = جا ٤θ ثم أوجد :

قيم θ حيث θ ∈]٠ ، π/٢[

الحل ∵ جتا ٢θ = جا ٤θ

∴ جا ٤θ = جتا ٢θ

٤θ ± ٢θ = π/٢ + ٢π ن

٤θ + ٢θ = π/٢ + ٢π ن

٦θ = π/٢ + ٢π ن

θ = π/١٢ + π/٣ ن

θ = π/١٢ + ٢π ن

٤θ − ٢θ = π/٢ + ٢π ن

٢θ = π/٢ + ٢π ن

θ = π/٤ + π ن

وهو الحل العام للمعادلة

عند ن = ٠

θ = π/١٢ = ١٥°

عند ن = ١

θ = π/١٢ + π/٣ × ١

θ = ١٥° + ٦٠° = ٧٥°

عند ن = ٢

θ = π/١٢ + π/٣ × ٢

θ = ١٣٥° × مرفوض

∉]٠ ، π/٢[

عند ن = ٠

θ = π/٤ + π × ٠

θ = ٤٥°

عند ن = ١

θ = π/٤ + π × ١

θ = ٢٢٥° × مرفوض

∉]٠ ، π/٢[

∴ قيم θ هي : ١٥° ، ٤٥° ، ٧٥°

مثال (٢) أوجد قيم θ ∈]٠ ، ٩٠°[التي تحقق المعادلة الآتية

ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣θ + ٣٠°)

الحل ∵ (θ + ٢٠°) + (٣θ + ٣٠°) = π/٢ + π ن

٤θ + ٥٠° = π/٢ + π ن

٤θ = π/٢ − ٥٠° + π ن

θ = π/٤ − ٥٠°/٤ + π ن

θ = ١٠° + π/٤ ن

∴ θ = ١/١٨ π + π/٤ ن

وهو الحل العام للمعادلة

لاحظ

١٠° = ١٠ × π/١٨٠

١٠° = ١/١٨ π

لإيجاد قيم θ نعوض عن $ن \in ص$

∴ عند $\boxed{ن = ٠}$

∴ $\theta = \frac{١}{١٨}\pi + \frac{\pi}{٤} \times ٠$

$\theta = ١٠^\circ$ ✓

∴ عند $\boxed{ن = ١}$

∴ $\theta = \frac{١}{١٨}\pi + \frac{\pi}{٤} \times ١$

$\theta = ١٠^\circ + ٤٥^\circ$ $\boxed{\theta = ٥٥^\circ}$ ✓

∴ عند $\boxed{ن = ٢}$

∴ $\theta = \frac{١}{١٨}\pi + \frac{\pi}{٤} \times ٢$

$\theta = ١٠^\circ + ٩٠^\circ = ١٠٠^\circ$ × مرفوض

$\notin [٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

∴ قيم θ هي $١٠^\circ ، ٥٥^\circ$

مثال (٣) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

[١] $٢ جا\theta - ١ = ٠$ ، $\theta \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

الحل $٢ جا\theta = ١$

$جا\theta = \frac{١}{٢}$ ∴ $\theta = ٣٠^\circ$

جا موجبة في الربع الأول والثاني

في الربع الأول	في الربع الثاني
$\boxed{\theta = ٣٠^\circ}$	$\theta = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ$
	$\boxed{\theta = ١٥٠^\circ}$
	× مرفوض
	$\notin [٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

∴ م.ح = $\{٣٠^\circ\}$

[٢] $٢ جتا(\frac{\pi}{٢} - \theta) + \sqrt{٣} = ٠$

حيث $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ **الحل**

$\cancel{٢} جتا(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \frac{-\sqrt{٣}}{\cancel{٢}}$

$جتا(\cancel{\frac{\pi}{٢}} - \theta) = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

$جا\theta = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ $جا\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\theta = ٦٠^\circ$

جا سالبة في الربع الثالث والرابع

في الربع الثالث	في الربع الرابع
$\theta = ١٨٠^\circ + \theta$	$\theta = ٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ$
$\theta = ١٨٠^\circ + ٦٠^\circ$	$\boxed{\theta = ٣٠٠^\circ}$
$\boxed{\theta = ٢٤٠^\circ}$	

∴ م.ح = $\{٢٤٠^\circ ، ٣٠٠^\circ\}$

[٣] $٤ جتا^٢\theta - ٣ = ٠$ حيث $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ **الحل**

$٤ جتا^٢\theta = ٣$ ⇐ $جتا^٢\theta = \frac{٣}{٤}$

$جتا\theta = \pm\sqrt{\frac{٣}{٤}} = \pm\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\boxed{\theta = ٣٠^\circ}$

جتا موجبة وسالبة إذا تشتغل في الأربع أرباع

في الربع الأول ⇐ $\boxed{\theta = ٣٠^\circ}$ ✓

في الربع الثاني ⇐ $١٨٠^\circ - ٣٠^\circ$ ⇐ $\boxed{\theta = ١٥٠^\circ}$ ✓

في الربع الثالث ⇐ $\theta = ١٨٠^\circ + ٣٠^\circ$ ⇐ $\boxed{\theta = ٢١٠^\circ}$ ✓

في الربع الرابع ⇐ $\theta = ٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ$ ⇐ $\boxed{\theta = ٣٣٠^\circ}$ ✓

∴ م.ح = $\{٣٠^\circ ، ١٥٠^\circ ، ٢١٠^\circ ، ٣٣٠^\circ\}$

٥ الواجب الخامس

١ أكمل ما يأتي :-

١ ظا ٤٢° = ظتا .....

٢ جتا ٧٣° = جا .....

٣ جا ١٥٠ = ...

٤ إذا كان جتا θ = جا ٢θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : جا ٣θ = ...

٥ إذا كان ظتا ٢θ − ظا θ = ٠ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : θ = ...°

٦ إذا كان : جا α = جتا β فإن : ظا (β + α) = ...

٧ إذا كان : جا ٢θ = جتا ٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : ظا (٩٠° − ٣θ) = ...

٨ إذا كانت : جتا (٩٠° + θ) + جا (٩٠° − ٢θ) = ٠ حيث θ ∈]٠ ، ٤/π[فإن : جا ٢θ = ...

٩ إذا كان ٢ جا θ + √٣ = ٠ فإن θ = ... حيث θ ∈]٠ ، ٢π[

٢ أوجد قيم θ في كل من المعادلات الآتية حيث θ ∈ [٠ ، ٢/π[

١ جا (٣θ + ١٥°) = جتا (٢θ − ٥°)

٢ قا (θ + ٢٥°) = قتا (θ + ١٥°)

٣ جتا ((θ + ٢٠°)/٢) = جا ((θ + ٤٠°)/٢)

٤ ظا (θ + ١٥°) = ظتا (٣θ − ٤٠)

٥ ظا (θ + ٢٧°) = ظتا ٢θ

٣ أوجد قيم θ التي تحقق المعادلات الآتية حيث θ ∈]٠ ، ٢/π[:

١ ظا θ − ١ = ٠

٢ ٢ جا (٢/π − θ) = √٣

٣ ٢ جا θ + √٣ = ٠

٤ √٣ قتا θ = −٢

٥ جا² θ = ١/٤

٤ إذا كان : (جا (٣θ − ٢٥°)) / (جتا (٢θ − ٣٥°)) = ١ فأوجد قيمة : θ حيث θ ∈]٠ ، ٤/π[ثم أوجد قيمة : (جا ١٨°) / (جتا ٧٢°) + جا (١٨٠° − θ)

٥ إذا كان : (ظا θ) / (ظتا ٢θ) = ١ حيث ٠° < θ < ٩٠° فأوجد قيمة θ ثم أوجد قيمة : جا (١٨٠° − ٣θ) جتا (٣٦٠° − ٢θ) + ظا ٢θ ظتا (١٨٠° − θ)

٦ الدرس السادس

التمثيل البياني للدوال المثلثية

أولاً : دالة الجيب :-

(د(θ) = جا θ)

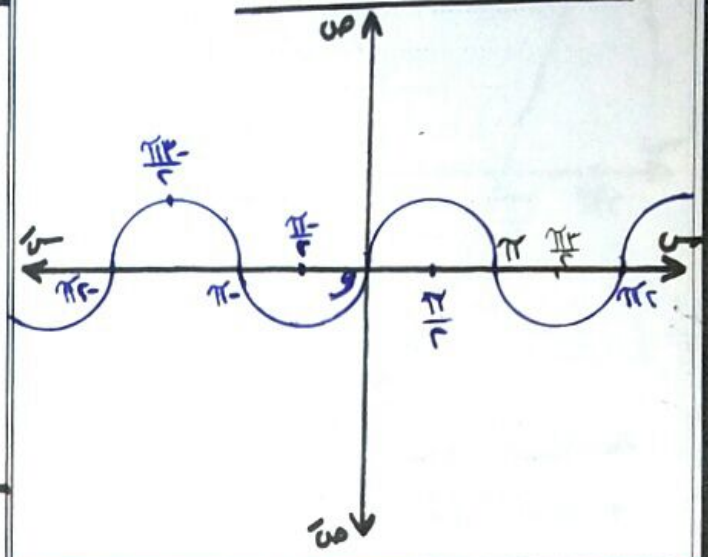
- مجال دالة الجيب هو]−∞ ، ∞[
- قيمتها العظمى = ١ عند θ = ٢/π + ٢ن π
- قيمتها الصغرى = −١ ، عند θ = ٣π/٢ + ٢ن π

حيث ن ∈ ص

∴ مدى الدالة = [−١ ، ١]

- الدالة دورية ودورتها ٢π (٣٦٠°)

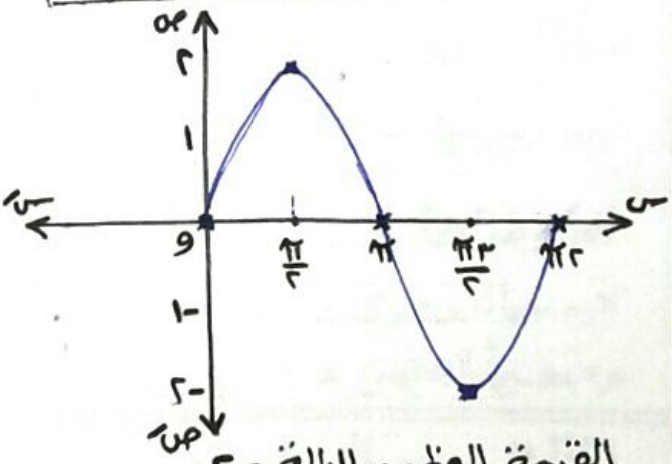
* الشكل العام لدالة الجيب :-



مثال (١) إرسم منحنى الدالة د :
د(س) = ٢ جاس حيث س ∈ [٠ ، ٢π]
ومن الرسم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة ومداها وأذكر دورتها .

الحل نكون الجدول التالى أولاً

س	٠	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	٢π
د(س)	٠	٢	٠	-٢	٠

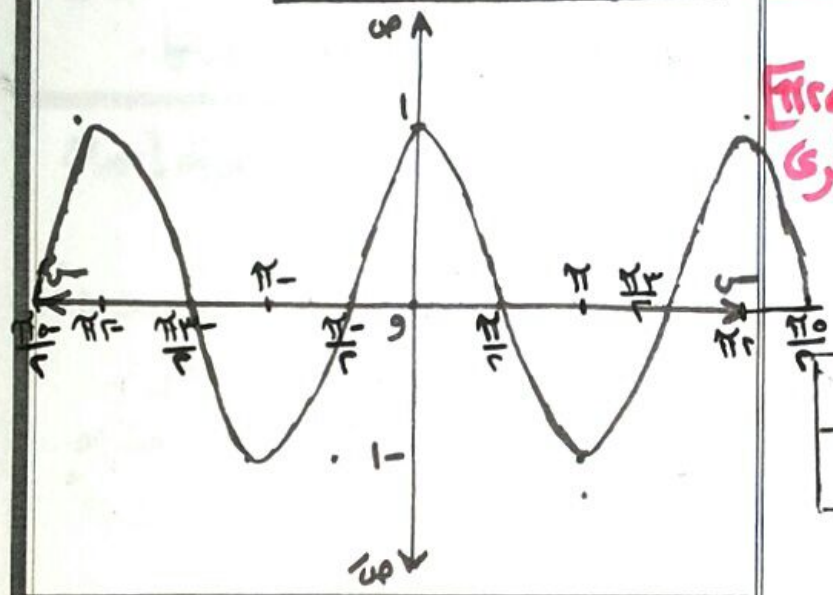


القيمة العظمى للدالة = ٢
القيمة الصغرى للدالة = -٢
∴ مدى الدالة = [-٢ ، ٢]
∴ دورة الدالة = ٢π (٣٦٠°)

ثانياً : دالة جيب التمام

د(θ) = جتا θ
⇐ مجالها]-∞ ، ∞[
⇐ قيمتها العظمى = ١ عند θ = ± ٢ن π
⇐ قيمتها الصغرى = -١ عند θ = π ± ٢ن π
حيث ن ∈ ص
⇐ مدى الدالة = [-١ ، ١]
⇐ الدالة دورية ودورتها ٢π (٣٦٠°)

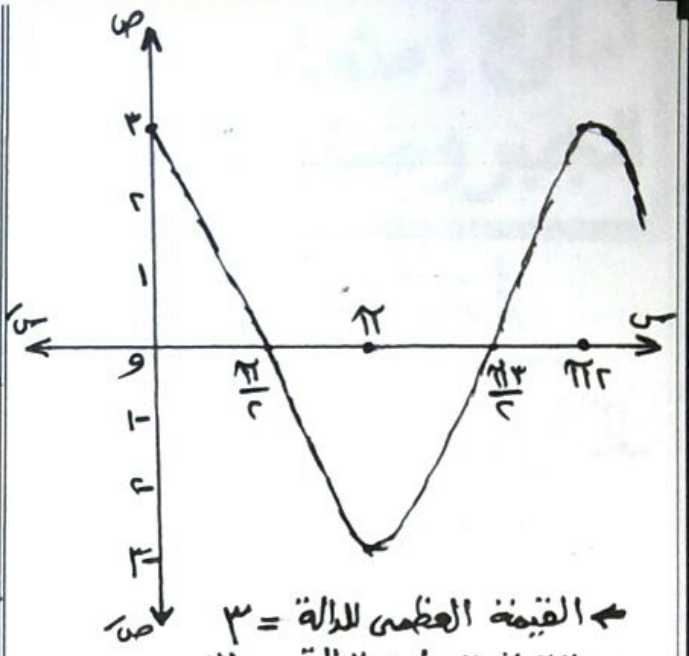
* الشكل العام لدالة جيب التمام :-



مثال (٢) إرسم منحنى الدالة د :
ص = ٣ جتا θ حيث θ ∈ [-٢π ، ٢π]
ومن الرسم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة ومدى الدالة واذكر دورتها .

الحل نكون الجدول التالى أولاً

θ	٠	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	٢π
ص	٣	٠	-٣	٠	٣



← القيمة العظمى للدالة = ٣

← القيمة الصغرى للدالة = -٣

← مدى الدالة = [-٣ ، ٣]

← دورة الدالة = ٢π (٣٦٠°)

① مدى الدالة د حيث د(θ) = جا θ هو .....

② مدى الدالة د حيث د(θ) = ٢ جا θ هو .....

③ مدى الدالة د: د(θ) = جتا ٥θ هو .....

④ مدى الدالة د: د(θ) = ٢ جا ٤θ هو ..... ودورتها = ...

② ارسم الشكل البياني للدالة ص = ٤ جتا θ في الفترة [٠ ، ٢π] واكتب مداها ودورتها

③ ارسم الشكل البياني للدالة ص = ٣ جا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢π] واكتب قيمها الصغرى والعظمى ومداها ودورتها.

ملاحظة هامة جداً :-

كل من الدالتين ص = أ جا ب θ ، ص = أ جتا ب θ دالة دورية دورتها $\frac{2\pi}{|ب|}$ ومداها [-أ ، أ] حيث أ موجبة

فمثلاً ص = ٥ جا ٣θ

← دورتها = $\frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3} = 120°$

← ومداها = [-٥ ، ٥]

قيمتها الصغرى = -٥

وقيمتها العظمى = ٥

* إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية :-

① إذا كان : جا α = $\frac{3}{5}$ حيث 90° < α < 180° ، ظا β = $\frac{-12}{5}$ حيث β ∈] $\frac{3\pi}{2}$ ، 2π [، جا θ = جا(180° - α) جتا(180° - β) جتا α

أوجد θ لأقرب دقيقة حيث 0° < θ < 90°

الحل

المجاور = $\sqrt{25 - 9}$ = 4 | الوتر = $\sqrt{144 + 25}$ = 13

في الربع الثاني (-، +) | في الربع الثالث (+، -)

جا θ = جا(180° - α) جتا(180° + β) جتا α

= جا α × (-جتا β) جتا α

= $\frac{3}{5} \times -\left(\frac{-5}{13}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{12}{65}$

وود = $\left(\frac{12}{65}\right)$ sin shift

∴ θ = 10° 38′ 19″ ≃ 10° 38′

٦ الدرس السادس (الواجب)

① أكمل ما يأتي :-

نماذج إمتحانات على الجبر وحساب المثلثات

إختبار (١)

١ أكمل ما يأتي :-

① قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة $س^2 + (ك - 5)س - 9 = 0$ معكوساً جمعياً للجذر الآخر = ...

② مجموعة حل المتباينة $س^2 + 25 > 0$ في ح هي .....

③ الزاوية التي قياسها $(63^\circ + 2\pi ن)$ حيث ن ∈ ص+ تقع في الربع .....

④ إذا كان : $\frac{جتا\ 47^\circ}{حا(-43^\circ)} + ظا\ هـ = صفر$

فإن ق(هـ) = ... $^\circ$ حيث هـ ∈]٠، ٩٠[

٢ إختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين

① مجموعة حل المعادلة $س^2 - 6س = 7$ في ح هي .....

[{١، ٧} ، {-١، ٧} ، {-١، -٧} ، {١، -٧}]

② جذرا المعادلة : $س^2 + 2س + ك = 0$ يكونان حقيقيين مختلفين إذا كانت ....

[ك = ١ ، ك > ١ ، ك < ١ ، ك = ٤]

③ حا ٢٠° = $\frac{1}{.....}$

[جتا ٢٠° ، قتا ٧٠° ، قا ٧٠° ، ظا ٧٠°]

④ العدد التخيلي (-ت) يعتبر بالنسبة للعدد التخيلي (ت) .....

[معكوس جمعي فقط ، معكوس ضربي فقط ، معكوس جمعي وضربي في نفس الوقت]

③ (أ) إذا كان ل ، م جذرا المعادلة : $س^2 - 2س + 5 = 0$ فكون المعادلة التي جذراها : ل + م ، ل م

(ب) أوجد بالتقدير الدائري والستيني قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله ١٢ سم في دائرة طول قطرها ٢٠ سم

④ (أ) إذا كانت : $س = \frac{13 + 13ت}{5 + ت}$ ، $ص = \frac{5 + ت}{1 + ت}$ إثبت أن س ، ص مترافقان

(ب) بدون إستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة جتا(-٣٠°) جتا ٢٤٠° - ظا ١٣٥° قا ٢٤٠°

⑤ (أ) إدرس إشارة د : د(س) = $س^2 - س - 12$

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة : جا(٦θ - ٢٠°) = جتا(٤θ + ١٠°) ثم أوجد جميع قيم θ ∈]٠، ٩٠°[والتي تحقق المعادلة

إختبار (٢)

١ أكمل ما يأتي :-

① إذا كانت س = ٣ أحد جذري المعادلة $أ س^2 - أ س - 12$ فإن أ = ...

② المعادلة التربيعية التي معاملاتها أعداد حقيقية وأحد جذريها ٢ - ٣ت هي ....

③ إذا كان د(θ) = أ جا θ مداها هو [$\frac{7}{3}$ ، $\frac{7}{3}$] فإن أ = ...

④ إشارة الدالة د : د(س) = $(س - 5)^2$ هي .....

٢ إختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :-

① إذا كان أحد جذري المعادلة $(أ^2 - 3)س^2 - س + 5 = 0$ معكوس ضربي للآخر فإن أ = ...

[-١ ، صفر ، ٤ ، $\frac{3}{2}$]

إختبار (٣)

١ إختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :-

① إذا كان جذرا المعادلة $٤س^٢ - ١٢س + م = ٠$ متساويين فإن م = ...

[٣ ، ٦ ، ٩ ، -٩]

② أبسط صورة للعدد التخيلي $ت^{٤٢}$ هي .....

[١ ، -١ ، ت ، -ت]

③ ظا(-٣٠°) = ...

[$-\sqrt{٣}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\sqrt{٣}$]

④ أبسط صورة للمقدار جتا(١٨٠° + θ) + جا(٩٠° + θ) تساوي .....

[٠ ، ٢ ، ٢ جتا θ ، ٢ جا θ]

٢ أكمل ما يأتي :-

① إذا كانت ٠ < θ < ٣٦٠° ، قتا θ = -٢√٢

فإن θ = ...° أو .....°

② $\frac{٢ قا θ قتا θ}{٤ جا^٢ θ + ٤ جتا^٢ θ}$ = ...

③ المعادلة التي جذراها ٣ت ، -٣ت هي .....

④ د(س) = $-\frac{١}{٣}$ إشارتها هي ..... في .....

٣ (أ) بدون الآلة الحاسبة قيمة ما يأتي

قا(-٣٠°) جا^٢ ٢٢٥° - $\frac{ظا ٢٧°}{ظتا ٦٣°}$

(ب) ابحث إشارة الدالة د :

د(س) = ٢س^٢ + ٧س - ٤ في ح

٤ (أ) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^٢ - ٩س + ٣ = ٠ كون المعادلة التي جذراها ٥ل ، ٥م

(ب) أوجد محيط الدائرة التي فيها قوس طوله ١٠سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥°

٢ إشارة الدالة د : د(س) = ٦ - ٣س تكون موجبة إذا كانت : .....

[س > ٢ ، س ≥ ٢ ، س < ٢ ، س ≤ ٢]

③ إذا كانت ظا(٣θ + ٧٠°) = ظتا θ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{٣π}{٢}$[فإن جا(٣θ + ٣٠°) = ...

[$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ١ ، ٠]

④ زاوية مركزية طول القوس المقابل لها يساوي طول قطرها فإن قياسها بالتقدير الدائري يساوي .....

[٣° ، ٥° ، ٢° ، $\frac{٣}{٢}$ π]

٣ (أ) أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان $\frac{(٣+ت)(١-ت)}{٥+٧ت}$ = س + ت ص

(ب) إذا كان $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة : ٤س^٢ + ٣س - ٢ = ٠ كون المعادلة التربيعية التي جذراها : ل ، م

٤ (أ) ارسم منحنى الدالة د : د(س) = س^٢ - ٤ ومن الرسم ① أوجد مدى الدالة

② أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

③ ابحث إشارة الدالة في [-٣ ، ٣]

(ب) إذا كان : ٢٤ قتا θ = -٢٥ حيث θ ∈]π ، $\frac{٣π}{٢}$[أوجد القيمة العددية للمقدار

جتا(١٨٠° - θ) ظتا(٩٠° - θ) + $\frac{٢}{٢٥}$ جا ٩٠° جا ٣٠°

٥ (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة في ح

س^٢ + ٣س ≥ ٤

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة :

جا ٤θ = جتا ٢θ ثم أوجد قيم θ حيث ٠ < θ < $\frac{π}{٢}$

٥ (أ) بين نوع جذري المعادلة

س² − ٥س + ١٤ = ٠ ثم أوجد الجذرين

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة :

قا θ − √٢ = ٠ حيث θ ∈]٠ ، ٢π[

إختبار (٤)

١ إختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

① إشارة د(س) = ٤ − ٢س تكون سالبة إذا كانت .....

[س > ٢ ، س ≤ ٢ ، س < ٢ ، س = ٢]

② أبسط صورة للعدد التخيلي ت^(−٣١) هي ...

[١ ، −١ ، ت ، −ت]

③ د(θ) = جتا θ قيمتها الصغرى هي −١ عندما θ = ... حيث θ ∈ ص

[π/٢ ، π ± ٢ن π ، ٢π ، π/٢ ± ٢ن π]

④ الزاوية التي قياسها (−٨٩٠) تقع في الربع .... [الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع]

٢ أكمل ما يأتي :

① إذا كان أ + ب ت = √(٣ − ٥ت + ١)

فإن أ = ... ، ب = ...

② إذا كانت ظا θ > ٠ ، قا θ < ٠ فإن θ تقع في الربع .....

③ إذا كان أحد جذري المعادلة ٣س² − (٤أ + ٧)س − ٣ = ٠ معكوساً جمعياً للجذر الآخر فإن أ = ...

④ مدى الدالة د حيث د(θ) = ٣ جا ٥θ هو .....

٣ (أ) إذا كان ل ، م جذري المعادلة س² − ٢س − ٣ = ٠ فأوجد المعادلة التي جذراها ٢ل/م ، ٢م/ل

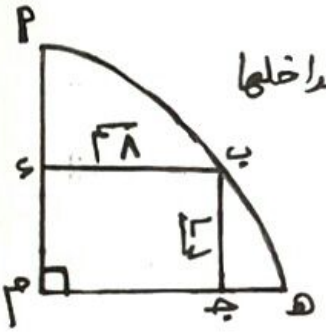
(ب) إذا كان : جا α = ٣/٥ حيث α ∈]٠ ، π/٢[، ١٢ ظا β = ٥ حيث π < β < ٣π/٢ فأوجد قيمة المقدار : جا α جتا β − جتا α جا β

٤ (أ) أوجد قيمتي س ، ص ∈ ح اللتين تحققان المعادلة :

س − ٣ص + (س + ص) ت = ٦١/(٦ − ٥ت)

حيث (ت² = −١)

(ب) في الشكل المقابل ربع دائرة م مرسوم بداخلها مستطيل م ء ب جـ حيث ب ء = ٨√٢ ، ب جـ = ٦√٢ أوجد طول : أ ب ⌒ هـ



٥ (أ) إذا كان ل ، م جذري المعادلة : س² + ٣س + ٤ = ٠ فكون المعادلة التربيعية التي جذراها ل² ، م²

(ب) أوجد في ح مجموعة حل المتباينة ٥ − ٤س ≤ س²

(دعاء بعد المذاكرة)

[اللهم إني أستودعك ما ذاكرت وما حفظت وما قرأت فرده إليّ عند حاجتي إليه يا أرحم الراحمين]

إختبار (٥)

١ إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :-

١ مرافق العدد ٣ت + ٥ هو .... [٣ت + ٥ ، ٣ت − ٥ ، −٣ت − ٥ ، ٥ − ٣ت]

٢ الزاوية التي قياسها $\frac{٢٧\pi}{٣}$ تقع في الربع [الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع]

٣ إذا كانت : θ قياس زاوية حادة وكان جا(θ + ٢٠°) = جتا ٣٠° فإن θ = ...
[٢٠° ، ٣٠° ، ٤٠° ، ٥٠°]

٤ قياس الزاوية بالدرجات التي تقابل قوساً طوله $\frac{٢\pi}{٦}$ في دائرة طول نصف قطرها ٩ سم يساوي .... [٣٠° ، ٦٠° ، ١٢٠° ، ١٥٠°]

٢ أكمل ما يأتي :-

١ الضلع النهائي للزاوية الموجهة θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (جـ ، −جـ) فإن قا(θ) = ...

٢ إذا كان جذرا المعادلة : ٤س² + ك س + ٩ حقيقيين متساويين فإن ك = ...

٣ إذا كانت س = ت^(−٥٧) فإن س² = ...

٤ مجموعة حل المعادلة س² = −٥س في ح هي .....

٣ (أ) ابحث إشارة الدالة د(س) = س² + ٢س − ١٥ ومنها عين مجموعة حل المتباينة
س² + ٢س ≥ ١٥

(ب) ضع ما يأتي على صورة س + ت ص $\frac{(٣ - ٥ت)(٣ + ٥ت)}{(١ - ٢ت)(٣ - ت)}$

٤ (أ) إذا كان ل + ١ ، م + ١ هما جذرا المعادلة : س² − ٥س + ٣ = ٠ أوجد المعادلة التي جذراها : ل ، م

(ب) إذا كان جا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، ٩٠° < θ < ١٨٠° أوجد
جا(١٨٠° − θ) + جتا(٩٠° + θ) + ظا(٣٦٠° − θ)

٥ (أ) بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة :
جتا(−٣١٥°) جا ٤٥° − جا ٣٣٠° ظا ١٣٥°

(ب) دائرة طول قطرها ٨ سم رسمت Δ أ ب جـ المحيطية التي قياسها ٣٥° احسب طول القوس $\overset{\frown}{أجـ}$ الأصغر