الأدهم

فى

# الهندسة الفراغية

## الصف الثالث الثانوى

عام وأزهر

٢٠١٩

هدية مجانية

إعداد أ/ محمد أدهم

ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

# الوحدة الأولى

## الدرس الأول : النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد

### ملاحظات

١ المستوى الإحداثي س ص معادلته ع = ٠

٢ المستوى الإحداثي س ع معادلته ص = ٠

٣ المستوى الإحداثي ص ع معادلته س = ٠

---

٤ معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣)

موازياً س ص هي ع = ٣

موازياً ص ع هي س = ١

موازياً س ع هي ص = ٢

---

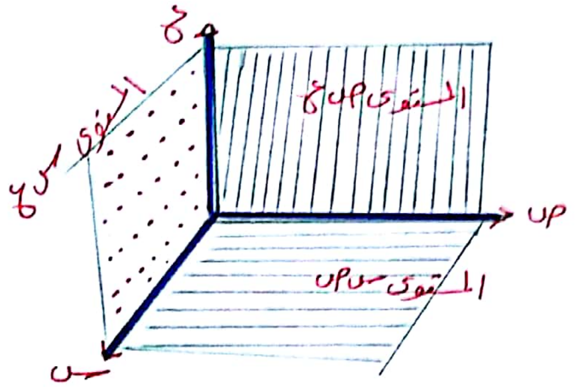
لاحظ الفرق بين الجزئية اللي فاتوا

---

٥ معادلة محور س في الفراغ هي ص = ٠ ، ع = ٠

٦ معادلة محور ص في الفراغ هي س = ٠ ، ع = ٠

٧ معادلة محور ع في الفراغ هي س = ٠ ، ص = ٠




٨ المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ص}}$ يعينان المستوى س ص

---

٩ المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ع}}$ يعينان المستوى س ع وهكذا

---

١٠ بعد النقطة (أ ، ب ، جـ)

أ عن المستوى

س ص = |جـ|

ص ع = |أ|

س ع = |ب|

---

ب عن المحور

س = $\sqrt{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2}$

ص = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2}$

ع = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$

## أكمل

١) النقطة (٠، ٥، ٠) تقع على محور ص ...

٢) النقطة (٠، ٠، -٢) تقع على محور ع ...

٣) النقطة (-٢، ٠، ١) تقع في المستوى س ع ... الذي معادلته ص = ٠

٤) بعد النقطة (-٤، -٣، ٢) عن

عن المستوى س ص = ٢

ص ع = |-٤| = ٤

س ع = |-٣| = ٣ وحدة طول

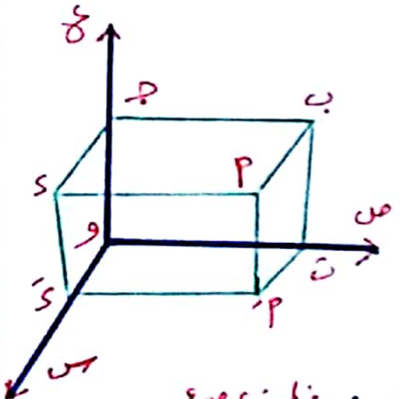
عن المحور

س = √(٩+٤) = √١٣ وحدة طول

ص = √(١٦+٤) = ٢√٥ وحدة طول

ع = √(١٦+٩) = ٥ وحدة طول

٥) في الشكل المقابل متوازي مستطيلات أ(٥، ٨، ٤) فإن




١) ب = (٠، ٨، ٤) في المستوى ص ع

٢) جـ = (٠، ٠، ٤) محور ع

٣) د = (٥، ٠، ٤) في المستوى س ع

٤) أ' = (٥، ٨، ٠) في المستوى س ص

## الفكرة الثانية

١) البعد بين النقطتين (س١، ص١، ع١) ، (س٢، ص٢، ع٢)

من القانون

$= \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2 + (ع_1 - ع_2)^2}$

٢) لإثبات أن أ، ب، جـ على استقامة واحدة

أكبر بعد = مجموع البعدين الآخرين

مثلاً أجـ = أب + ب جـ

٣) لإثبات أن المثلث متساوي الأضلاع

أب = ب جـ = أ جـ

٤) لتحديد نوع المثلث من حيث زواياه

إذا كان أ جـ هو أكبر الأضلاع طولاً

(أ جـ)² = (أ ب)² + (ب جـ)² قائم في ب

(أ جـ)² > (أ ب)² + (ب جـ)² منفرج في ب

(أ جـ)² < (أ ب)² + (ب جـ)² حاد الزوايا

٥) إحداثيات منتصف أب

$= \left( \frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

**١** إذا كان أ(٧ ، ٤ ، ٤) ، ب(١ ، ٠ ، ٠) فإن أب = .... وحدة طول

الحل

$$أب = \sqrt{(٧-١)^{٢} + ٠ + (٤)^{٢}} = ٢\sqrt{١٣} \text{ وحدة طول}$$

**٢** اثبت أن أ(١ ، ٢ ، ٥) ، ب(٢ ، ٥ ، ٣) ، ج(-١ ، ٣ ، ٢) هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع وأوجد مساحته.

الحل

$$أب = \sqrt{(٢-١)^{٢} + (٥-٢)^{٢} + (٣-٥)^{٢}}$$

$= \sqrt{١٤}$ وحدة طول

$$ب ج = \sqrt{(٢+١)^{٢} + (٥-٣)^{٢} + (٣-٢)^{٢}}$$

$= \sqrt{١٤}$ وحدة طول

$$أ ج = \sqrt{(١+١)^{٢} + (٢-٣)^{٢} + (٥-٢)^{٢}}$$

$= \sqrt{١٤}$ وحدة طول

∴ أب = ب ج = أ ج

∴ △ أ ب ج متساوي الأضلاع.

مساحة △ = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب أي ضلعين × جا المحصورة

$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{١٤} \times \sqrt{١٤} \times$ جا ٦٠

$= \frac{٧\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة

**٣** أوجد نقطة منتصف أب حيث أ(١ ، -٣ ، ٢) ، ب(٤ ، -١ ، ٤)

الحل

$$م = \left(\frac{٤+١}{٢} ، \frac{-٣-١}{٢} ، \frac{٢+٤}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٥}{٢} ، -٢ ، ٣\right)$$

**٤** إذا كانت ج(-١ ، ٤ ، ٠) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث ب(٤ ، -٢ ، ١) أوجد إحداثيات أ

الحل

∵ ج منتصف أب

∴ $\frac{أ+ب}{٢} = ج$

أ + ب = ٢ ج

أ = ٢ ج - ب

أ = ٢(-١ ، ٤ ، ٠) - (٤ ، -٢ ، ١)

= (-٢ ، ٨ ، ٠) - (٤ ، -٢ ، ١) = (-٦ ، ١٠ ، -١)

**٥** إذا كانت ج(-١ ، ٦ ، -٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(ل-٢ ، -١ ، م+٣) ، ب(٢ ، ن-٧ ، -٢) فإن قيمة ل + م - ن هي ...

الحل

$$ج = \left(\frac{ل-٢+٢}{٢} ، \frac{-١+ن-٧}{٢} ، \frac{م+٣-٢}{٢}\right)$$

$$(-١ ، ٦ ، -٥) = \left(\frac{ل}{٢} ، \frac{ن-٨}{٢} ، \frac{م+١}{٢}\right)$$

$\frac{\text{ل}}{٢} = -١$ ∴ $\boxed{\text{ل} = -٢}$

$\frac{\text{ن} - ٨}{٢} = ٦$ ، ن − ٨ = ١٢ ∴ $\boxed{\text{ن} = ٢٠}$

$\frac{\text{م} + ١}{٢} = -٥$ ، م + ١ = −١٠ ∴ $\boxed{\text{م} = -١١}$

∴ ل + م − ن

= −٢ − ١١ − ٢٠ = $\boxed{-٣٣}$

---

٦ إذا كانت أ ∈ محور س ، ب ∈ محور ص ، ج ∈ محور ع وكانت (١، −١، ٠) منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، (٠، −١، ٢) منتصف ب ج أوجد إحداثيات منتصف $\overline{\text{أج}}$

الحل

أ(س، ٠، ٠) ب(٠، ص، ٠) ، ج(٠، ٠، ع)

منتصف $\overline{\text{أب}}$

$\left(\frac{\text{س}}{٢} ، \frac{\text{ص}}{٢} ، ٠\right) = (١، −١، ٠)$

∴ $\frac{\text{س}}{٢} = ١$ ∴ $\boxed{\text{س} = ٢}$

$\frac{\text{ص}}{٢} = -١$ ∴ $\boxed{\text{ص} = -٢}$

منتصف ب ج

$\left(٠ ، \frac{\text{ص}}{٢} ، \frac{\text{ع}}{٢}\right) = (٠، −١، ٢)$

∴ ص = −٢

$\boxed{\text{ع} = ٤}$

∴ منتصف $\overline{\text{أج}}$

$= \left(\frac{\text{س}}{٢} ، ٠ ، \frac{\text{ع}}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٢}{٢} ، ٠ ، \frac{٤}{٢}\right) = (١، ٠، ٢)$

---

## الفكرة الثالثة

### معادلة الكرة فى الفراغ

١ الصورة القياسية

$(\text{س} - \text{ل})^٢ + (\text{ص} - \text{ك})^٢ + (\text{ع} - \text{ن})^٢ = \text{نق}^٢$

حيث مركزها (ل ، ك ، ن)

٢ المعادلة العامة

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ + ٢\text{ل س} + ٢\text{ك ص} + ٢\text{ن ع} + \text{د} = ٠$

٣ مركزها (−ل ، −ك ، −ن)

٤ $\text{نق} = \sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ك}^٢ + \text{ن}^٢ - \text{د}}$

٥ $\text{د} = \text{ل}^٢ + \text{ك}^٢ + \text{ن}^٢ - \text{نق}^٢$

٦ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi \text{نق}^٣$ وحدة مكعبة

٧ مساحة سطح الكرة = $٤ \pi \text{نق}^٢$ وحدة مربعة

(١) عين مركز وطول نصف قطر الكرة الاتية

$(س - ٥)^٢ + (ص + ٤)^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٢٥$

ثم أوجد مساحة سطحها وحجمها

الحل

* م $(٥ ، -٤ ، -٢)$
* نق $= ٥$ وحدة طول
* مساحة سطحها $= ٤ \pi$ نق$^٢ = ١٠٠ \pi$ وحدة مربعة
* حجمها $= \frac{٤}{٣} \pi$ نق$^٣ = \frac{٤}{٣} \pi \times ١٢٥ = \frac{٥٠٠}{٣} \pi$ وحدة مكعبة

(٢) عين مركز وطول نصف قطر الكرة :

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢س - ٤ص + ٦ع + ١٢ = ٠$

الحل

* م $= (-١ ، ٢ ، -٣)$ د $= ١٢$

نق $= \sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - د}$

* نق $= \sqrt{١ + ٤ + ٩ - ١٢} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

(٣) أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل والنقطة $(٥ ، -٢ ، ٣)$ تقع عليها .

الحل

م $(٠ ، ٠ ، ٠)$

نق $= \sqrt{(٥)^٢ + (-٢)^٢ + (٣)^٢} = \sqrt{٣٨}$ وحدة

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ =$ نق$^٢$

* $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٣٨$

حالة خاصة ١

إذا كان مركز الكرة يقع على محور س والكرة تمس المستوى ص ع فإن إحداثيات المركز $(أ ، ٠ ، ٠)$ ، نق $= |أ|$

وهكذا لباقي المحاور

(٤) أوجد معادلة الكرة التي يقع مركزها على محور س وتمس المستوى ص ع ويبعد مركزها عنه ٤ وحدات طول

الحل

لاحظ إن المركز هنا على محور س

$|س| = ٤$ ∴ $س = \pm ٤$

∴ المركز هو $(٤ ، ٠ ، ٠)$ أو $(-٤ ، ٠ ، ٠)$

وهنا يكون معادلتان

* $(س - ٤)^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٦$
* $(س + ٤)^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٦$

**حالة خاصة (٢)**

الكرة التى مركزها ( أ ، ب ، جـ )
وتمس المستوى س ص فإن نق = |جـ|
س ع فإن نق = |ب|
ص ع فإن نق = |أ|

**٥** أوجد معادلة الكرة التى مركزها ( -٥ ، ١ ، -٢) وتمس المستوى الاحداثى س ص

**الحل**

∵ الكرة تمس المستوى س ص
∴ نق = |ع| = |-٢| = ٢ وحدة طول
والمعادلة هى
$(س+٥)^2 + (ص-١)^2 + (ع+٢)^2 = ٤$

**حالة خاصة (٣)**

الكرة التى تمس مستويات الاحداثيات تكون مركزها ( ± نق ، ± نق ، ± نق)

**٦** أوجد معادلة الكرة التى تمس مستويات الاحداثيات واحداثيات مركزها موجبة وطول نصف قطرها ٥ وحدات

مركزها (٥ ، ٥ ، ٥) نق = ٥
والمعادلة هى
$(س-٥)^2 + (ص-٥)^2 + (ع-٥)^2 = ٢٥$

**٧** أوجد معادلة الكرة التى تمس الاجزاء الموجبة من محاور الاحداثيات وطول قطرها ١٠ $\sqrt{٢}$ وحدة طول .

**الحل**

ركز شوية اللى قبل دى كانت تمس المستويات دى تمس المحاور

نق = $\frac{١٠\sqrt{٢}}{٢}$ = ٥ $\sqrt{٢}$
ومركزها = $\frac{نق}{\sqrt{٢}}$ = (٥ ، ٥ ، ٥)

∴ معادلة الكرة هى
$(س-٥)^2 + (ص-٥)^2 + (ع-٥)^2 = ٥٠$

**٨** أوجد معادلة أصغر كرة تمر بالنقط (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٥)

**الحل**

هذه النقط هى رؤوس مثلث متساوى الأضلاع
طول ضلعه = ٥ $\sqrt{٢}$
المركز = ( $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$ )

$\frac{أ}{جا هـ}$ = ٢ نق $\frac{٥\sqrt{٢}}{جا ٦٠}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢ جا ٦٠}$

سهم قائدة الجيب

∴ نق = $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

∴ معادلة أصغر كرة هي ..

$$(س - \frac{5}{3})^2 + (ص - \frac{5}{3})^2 + (ع - \frac{5}{3})^2 = \frac{50}{3}$$

## اختر الإجابة الصحيحة

(١) معادلة الكرة التي مركزها (٢، -٢، ٥) ، نق = ٢√٥ وحدة طول ..

$$(س - 2)^2 + (ص + 2)^2 + (ع - 5)^2 = 20$$

(٢) معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات هي ...

$$س^2 + ص^2 + ع^2 = 9$$

(٣) معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣، -١، ٢) هي ...

$$نق = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$س^2 + ص^2 + ع^2 = 14$$

(٤) معادلة الكرة التي مركزها (٢، -٣، ٤) وتمس المستوى الإحداثي س ص هي ...

$$نق = |4| = 4$$

$$(س - 2)^2 + (ص + 3)^2 + (ع - 4)^2 = 16$$

(٥) $س^2 + ص^2 + ع^2 + 4س - 6ص + 8ع + 4 = 0$ معادلة كرة طول قطرها = ---- وحدة طول

م (-٢، ٣، -٤) ، د = ٤

$$نق = \sqrt{4 + 9 + 16 - 4} = 5$$

$$\sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - د}$$

∴ طول قطرها = ١٠ وحدة طول .

(٦) نصف قطر أصغر كرة تقع عليها النقط (٠، ٠، ٥) ، (٥، ٠، ٠) ، (٠، ٥، ٠) هو --- وحدة طول

$2 نق = \frac{5\sqrt{2}}{جا ٦٠}$ ∴ نق = $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

(٧) نصف قطر أصغر كرة تمر بالنقط (٥، ٥، ٠) ، (٠، ٥، ٥) ، (٥، ٠، ٥) هو --- وحدة طول

نفس الفكرة $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

(٨) إذا قطع المحور س الكرة

$$(س - 2)^2 + (ص + 3)^2 + (ع - 1)^2 = 14$$

في أ ، ب أوجد طول $\overline{أب}$

**الحل**

نوجد نقطة تقاطع المحور س مع الكرة

وهي ص = ٠ ، ع = ٠

$$(س - 2)^2 + 9 + 1 = 14$$

$(س - 2)^2 = 4$ ∴ $س - 2 = \pm 2$

$\text{س} - ٢ = \pm ٢$

$\text{س} - ٢ = ٢$ ، $\text{س} - ٢ = -٢$

$\text{س} = ٤$ ، $\text{س} = ٠$

$\text{أ}(٤، ٠، ٠)$ ، $\text{ب}(٠، ٠، ٠)$

$\therefore$ أب = ٤ وحدة طول

**٩** إذا كانت الكرتان

$(\text{س}-٣)^٢ + \text{ص}^٢ + (\text{ع}-٣)^٢ = ١٦$

، $(\text{س}+١)^٢ + (\text{ص}-٤)^٢ + (\text{ع}-\text{ل})^٢ = ٢٥$

متماستان فأوجد قيمة ل

## الحل

$\text{م}_١ (٣، ٠، ٣)$ ، $\text{م}_٢ (-١، ٤، \text{ل})$

$\text{نق}_١ = ٤$ ، $\text{نق}_٢ = ٥$

$\text{م}_١\text{م}_٢ = \sqrt{(٣+١)^٢ + (-٤)^٢ + (٣-\text{ل})^٢}$

احتمال يكون تماس من الداخل أو من الخارج

* اولاً من الداخل

$\text{م}_١\text{م}_٢ = \text{نق}_٢ - \text{نق}_١$

$\sqrt{٣٢ + (٣-\text{ل})^٢} = ١$ بتربيع الطرفين

$٣٢ + (٣-\text{ل})^٢ = ١$

$(٣-\text{ل})^٢ = ١ - ٣٢$

$(٣-\text{ل})^٢ = -٣١$ مرفوض

* في حالة التماس من الخارج

$\text{م}_١\text{م}_٢ = \text{نق}_١ + \text{نق}_٢$

$\therefore \sqrt{٣٢ + (٣-\text{ل})^٢} = ٥ + ٤ = ٩$

بالتربيع

$٣٢ + (٣-\text{ل})^٢ = ٨١$

$(٣-\text{ل})^٢ = ٨١ - ٣٢ = ٤٩$

$٣ - \text{ل} = \pm ٧$

$٣ - \text{ل} = ٧$ ، $٣ - \text{ل} = -٧$

$-\text{ل} = ٧ - ٣$ ، $-\text{ل} = -٧ - ٣$

$-\text{ل} = ٤$ ، $-\text{ل} = -١٠$

$\boxed{\text{ل} = -٤}$ ، $\boxed{\therefore \text{ل} = ١٠}$

# الدرس الثانى
# المتجهات فى الفراغ

## الفكرة الأولى

١) $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$

$أ_{س}$ مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور س

$أ_{ص}$ مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور ص

$أ_{ع}$ مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور ع

٢) $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{أ_{س}^{2} + أ_{ص}^{2} + أ_{ع}^{2}}$

٣) $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| \leq \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

٤) إذا كان $\|\overrightarrow{أ}\| = \|ك\,\overrightarrow{ب}\|$

فإن $\|\overrightarrow{أ}\| = |ك| \cdot \|\overrightarrow{ب}\|$

٥) لاحظ: إذا كان $|ك| = ٣$ فإن $ك = \pm ٣$

٦) متجه الوحدة: هو متجه معياره وحدة أطوال.

$\overrightarrow{ى}_{أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{\text{المتجه}}{\text{معياره}}$

٧) $\overrightarrow{س} = (١ ، ٠ ، ٠)$

$\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١ ، ٠)$

$\overrightarrow{ع} = (٠ ، ٠ ، ١)$

٨) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

$\overrightarrow{هـ د} = \overrightarrow{د} - \overrightarrow{هـ}$

## مسائل

١) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٣ ، ٤ ، ٢)$

فإن $\|\overrightarrow{أ}\| = ---$

$\sqrt{٩ + ١٦ + ٤} = \sqrt{٢٩}$ وحدة طول

٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}(-٢ ، ٣ ، ١)$

$\overrightarrow{ب}(٠ ، ٢ ، -٢)$

$\overrightarrow{جـ}(١ ، -٣ ، ٥)$

فإن $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ}\| = ---$

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ} = (-٢ - ١ ، ٣ + ٥ ، ١ - ٢ - ٥)$

$= (-٣ ، ٨ ، -٦)$

$\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{٩ + ٦٤ + ٣٦} = \sqrt{١٠٩}$ وحدة طول

٣) إذا كان $\|٤\overrightarrow{أ}\| = \|٣ك\,\overrightarrow{أ}\|$ فأوجد ك = ..

$٤ \cancel{\|\overrightarrow{أ}\|} = |٣ك| \cancel{\|\overrightarrow{أ}\|}$

$|٣ك| = ٤$ ∴ $|ك| = \frac{٤}{٣}$ ∴ $ك = \pm \frac{٤}{٣}$

**٤** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (١ ، ٢ ، -٤)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (١ ، ١ ، \text{ل} - ١)$
وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\| = ٧$ وحدة طولية
فاوجد قيمة ل ؟...

**الحل**

$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، ٣ ، \text{ل} - ٥)$

$\because \|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\| = ٧$

$\sqrt{٤ + ٩ + (\text{ل} - ٥)^{٢}} = ٧$ بالتربيع

$١٣ + (\text{ل} - ٥)^{٢} = ٤٩$

$(\text{ل} - ٥)^{٢} = ٤٩ - ١٣ = ٣٦$

$\text{ل} - ٥ = \pm ٦$

$\text{ل} = \pm ٦ + ٥$

$\text{ل} = ٦ + ٥$ ، $\boxed{\text{ل} = ١١}$ | $\text{ل} = -٦ + ٥$ ، $\boxed{\text{ل} = -١}$

$\therefore \text{ل} = ١١ ، -١$

**٥** متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢ ، ٣ ، ٢\sqrt{٣})$ = ----

**الحل**

$\overrightarrow{\text{ى}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = \frac{(٢ ، ٣ ، ٢\sqrt{٣})}{\sqrt{٤ + ٩ + ١٢}}$

$= \frac{١}{٥}(٢ ، ٣ ، ٢\sqrt{٣})$

$= \left(\frac{٢}{٥} ، \frac{٣}{٥} ، \frac{٢\sqrt{٣}}{٥}\right)$

**٦** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (٣ ، -٢ ، \text{م})$ وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{٢٢}$ فإن م = ----

**الحل**

$\sqrt{٩ + ٤ + \text{م}^{٢}} = \sqrt{٢٢}$ بالتربيع

$١٣ + \text{م}^{٢} = ٢٢$

$\text{م}^{٢} = ٢٢ - ١٣ = ٩$

$\therefore \text{م} = \pm ٣$

**٧** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (-١ ، ٥ ، -٢)$
$\overrightarrow{\text{ب}} = (٣ ، ١ ، ١)$
وكان $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{س}}$ فإن $\overrightarrow{\text{ج}}$ = ----

**الحل**

$\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$

$\overrightarrow{\text{ج}} = (١ ، ٠ ، ٠) - (-١ ، ٥ ، -٢) - (٣ ، ١ ، ١)$

$= (-١ ، -٦ ، ١)$

$= -\overrightarrow{\text{س}} - ٦\overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$

**٨** إذا كان $\overrightarrow{\text{أب}} = (-٣ ، ٣ ، ٧)$
$\overrightarrow{\text{ب ج}} = (٠ ، ١ ، ٥)$
فإن $\|\overrightarrow{\text{أ ج}}\|$ = ---

**الحل**

ملحوظة $\overrightarrow{\text{أ ج}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ ج}} = (-٣ ، ٤ ، ١٢)$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أ ج}}\| = \sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤} = ١٣$ وحدة طول

## الفكرة الثانية

١) $(\theta_{س}, \theta_{ص}, \theta_{ع})$

هي الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{أ}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

، $\theta_{س}, \theta_{ص}, \theta_{ع} \in [0, \pi]$

٢) ملحوظة متجه الوحدة = جيوب تمام الاتجاه = $\frac{\vec{أ}}{\|\vec{أ}\|}$

٣) $جتا^2\theta_{س} + جتا^2\theta_{ص} + جتا^2\theta_{ع} = 1$

٤) إذا كانت $(\theta_{س}, \theta_{ص}, \theta_{ع})$ هي للمتجه $\vec{أ}$ فإن زوايا الاتجاه للمتجه $-\vec{أ}$

هي $(\pi - \theta_{س}, \pi - \theta_{ص}, \pi - \theta_{ع})$

٥) إذا كان المتجه $\vec{أ}$ يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات الموجبة فإن

$\theta_{س} = \theta_{ص} = \theta_{ع} = \theta$

$٣ جتا^2\theta = 1$

$جتا^2\theta = \frac{1}{٣}$

$\therefore جتا\theta = \frac{\pm 1}{\sqrt{٣}}$

$\therefore \theta = ٥٤° ٤٤' ٨''$ أو $\theta = ١٢٥° ١٥' ٥٢''$

٦) مجموع قياس أي زاويتين من زوايا الاتجاه أكبر من أو يساوي $٩٠°$

٧) إذا كان مجموع قياس زاويتين $٩٠°$ فإن قياس الزاوية الثالثة = $٩٠°$

٨) زوايا اتجاه المحاور الموجبة

محور س $(0°, ٩٠°, ٩٠°)$

ص $(٩٠°, 0, ٩٠°)$

ع $(٩٠°, ٩٠°, 0)$

٩) جيوب تمام الاتجاه

محور س $(1, 0, 0)$

ص $(0, 1, 0)$

ع $(0, 0, 1)$

١٠) $جتا ٢\theta = جتا^2\theta - جا^2\theta$

$= ٢ جتا^2\theta - 1$

$= 1 - ٢ جا^2\theta$

# المسائل

**(١)** أوجد قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{ح} = 3\vec{س} - 4\vec{ص} + 5\vec{ع}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

## الحل

$\|\vec{ح}\| = \sqrt{9+16+25} = 5\sqrt{2}$

$\vec{ى}_ح = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}} ، \frac{-4}{5\sqrt{2}} ، \frac{5}{5\sqrt{2}}\right)$

$\because$ جتا $\theta_س = \frac{3}{5\sqrt{2}}$ $\therefore$ $\theta_س \simeq 64^\circ\ 54'$

جتا $\theta_ص = \frac{-4}{5\sqrt{2}}$ $\therefore$ $\theta_ص \simeq 124^\circ\ 27'$

جتا $\theta_ع = \frac{5}{5\sqrt{2}}$ $\therefore$ $\theta_ع \simeq 45^\circ$

---

**(٢)** إذا كان المتجه $\vec{م}$ يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة س، ص، ع زوايا قياساتها $60^\circ$، $80^\circ$، $\theta$ حيث $\theta$ حادة

المطلوب

(م) أوجد قيمة $\theta$

(ب) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\vec{م}$ إذا علمت أن $\|\vec{م}\| = 13$

## الحل

(م) $\because$ جتا$^2\theta_س$ + جتا$^2\theta_ص$ + جتا$^2\theta_ع = 1$

جتا$^2 60^\circ$ + جتا$^2 80^\circ$ + جتا$^2\theta = 1$

جتا$^2\theta = 1 - [$جتا$^2 60^\circ$ + جتا$^2 80^\circ]$

$\simeq 0.71985$

جتا $\theta = \pm\sqrt{\quad}$ —— وجتاθ + فقط لأنها حادة

$= 0.84848$

$\therefore$ جتا $\theta$ = $\theta \simeq 57'\ 31^\circ$

(ب) لاحظ $\vec{م}$: $\vec{ى}_م = \frac{\vec{م}}{\|\vec{م}\|}$

$\therefore \vec{م} = \|\vec{م}\| \times \vec{ى}_م$

= المعيار × متجه الوحدة

= المعيار × جيوب تمام الاتجاه

$\vec{م} = 13($جتا $60^\circ$، جتا $80^\circ$، جتا $57'\ 31^\circ)$

$= \frac{13}{2}\vec{س} + 2.26\vec{ص} + 11.03\vec{ع}$

---

**(٣)** جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\vec{م} = (-2، 1، 2)$

هـ - - -

متجه الوحدة $= \frac{\vec{م}}{\|\vec{م}\|} = \frac{(-2، 1، 2)}{\sqrt{4+1+4}}$

$= \left(\frac{-2}{3} ، \frac{1}{3} ، \frac{2}{3}\right)$

متجه زوايا الاتجاه له $(45^\circ، 45^\circ، \theta)$

فإن $\theta$ = - - - $90^\circ$

إذا اتضح أن مجموع زاويتيه $= 90^\circ$

يبقى الثالثة $= 90^\circ$

---

**(٤)** $(30^\circ، 60^\circ، \theta)$ فإن $\theta = 90^\circ$

**٥** إذا كانت: (٣٠°، ٧٠°، $\theta$) هي زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم $\theta$ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٦٠° (د) ٦٨٫٦°

هنجرب كل واحدة إذا كان جتا²$\theta_{س}$ + جتا²$\theta_{ص}$ + جتا²$\theta_{ع}$ = ١

هتكون هي الصح

---

**٦** اثبت أن

جا²$\theta_{س}$ + جا²$\theta_{ص}$ + جا²$\theta_{ع}$ = ٢

**الحل**

∵ جا²$\theta$ + جتا²$\theta$ = ١

جا²$\theta$ = ١ − جتا²$\theta$

١ − جتا²$\theta_{س}$ + ١ − جتا²$\theta_{ص}$ + ١ − جتا²$\theta_{ع}$

= ٣ − [جتا²$\theta_{س}$ + جتا²$\theta_{ص}$ + جتا²$\theta_{ع}$]

= ٣ − ١ = ٢

---

**٧** اثبت أن

جتا٢$\theta_{س}$ + جتا٢$\theta_{ص}$ + جتا٢$\theta_{ع}$ + ١ = ٠

**الحل**

∵ جتا٢$\theta$ = ٢جتا²$\theta$ − ١ المقدار

٢جتا²$\theta_{س}$ − ١ + ٢جتا²$\theta_{ص}$ − ١ + ٢جتا²$\theta_{ع}$ − ١ + ١

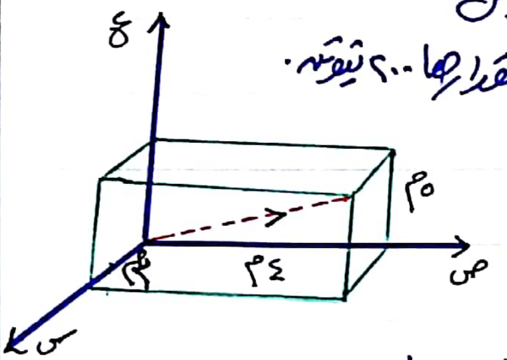
٢[جتا²$\theta_{س}$ + جتا²$\theta_{ص}$ + جتا²$\theta_{ع}$] − ٢

= ٢×١ − ٢ = صفر أ.طرف

---

**٨** الشكل المقابل

يمثل قوة ق مقدارها ٢٠٠ نيوتن




(أ) عبر عن ق بالصورة الجبرية

(ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة ق

**الحل**

(أ) نفرض أن $\overrightarrow{م}$ يمثل القطر الذي تعمل فيه القوة ق

∵ $\overrightarrow{م}$ (٣، ٤، ٥) ∴ $\|\overrightarrow{م}\|$ = ٥$\sqrt{2}$

∴ $\overrightarrow{و}$ = $\left(\frac{٣}{٥\sqrt{2}}، \frac{٤}{٥\sqrt{2}}، \frac{٥}{٥\sqrt{2}}\right)$

∴ $\overrightarrow{ق}$ = المقدار × متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{م}$

$\overrightarrow{ق}$ = ٢٠٠ × $\left(\frac{٣}{٥\sqrt{2}}، \frac{٤}{٥\sqrt{2}}، \frac{٥}{٥\sqrt{2}}\right)$

= ٦٠$\sqrt{2}$ $\overrightarrow{س}$ + ٨٠$\sqrt{2}$ $\overrightarrow{ص}$ + ١٠٠$\sqrt{2}$ $\overrightarrow{ع}$

---

(ب) $\theta_{س}$ = جتا$^{-1}$ $\frac{٣}{٥\sqrt{2}}$ ≈ ٦٤° ٥٤َ

$\theta_{ص}$ = جتا$^{-1}$ $\frac{٤}{٥\sqrt{2}}$ ≈ ٥٥° ٣٣َ

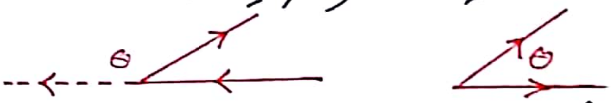
$\theta_{ع}$ = جتا$^{-1}$ $\frac{٥}{٥\sqrt{2}}$ = ٤٥°

# الدرس الثالث
## الضرب القياسي لمتجهين

١) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \|\vec{أ}\|\ \|\vec{ب}\|\ \text{جتا}\,\theta$

حيث $\theta$ هي الزاوية الصغرى بينهما

داخلين لها أو خارجين منها



٢) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = أ_س ب_س + أ_ص ب_ص + أ_ع ب_ع$

٣) إذا كانت $\theta = ٠^\circ$ متوازيين $\text{جتا}٠ = ١$

مثل $\vec{س} \cdot \vec{س} = \vec{ص} \cdot \vec{ص} = \vec{ع} \cdot \vec{ع} = ١$

$\vec{أ} \cdot \vec{أ} = \|\vec{أ}\|^٢$

٤) إذا كانت $\theta = ٩٠^\circ$ $\text{جتا}٩٠ = ٠$ متعامدان

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \|\vec{أ}\|\ \|\vec{ب}\|\ \text{جتا}٩٠ = \text{صفر}$

مثل

$\vec{س} \cdot \vec{ص} = \vec{ص} \cdot \vec{ع} = \vec{ع} \cdot \vec{س} = \text{صفر}$

٥) $\text{جتا}\,\theta = \dfrac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\|\ \|\vec{ب}\|}$

حيث $\theta$ هي الزاوية المحصورة بين متجهين

$٠^\circ \le \theta \le ١٨٠^\circ$

٦) مركبة المتجه $\vec{أ}$ في اتجاه $\vec{ب}$ [المركبة الجبرية]

ه $أ_ب = \dfrac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|} = \|\vec{أ}\|\ \text{جتا}\,\theta$

٧) المركبة الاتجاهية $\vec{أ}$ في اتجاه $\vec{ب}$

$\left(\dfrac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|}\right)\left(\dfrac{\vec{ب}}{\|\vec{ب}\|}\right) = \left(\dfrac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|^٢}\right)\vec{ب}$

٨) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \vec{ب} \cdot \vec{أ}$

٩) $\vec{أ} \cdot \vec{أ} = \|\vec{أ}\|^٢$

١٠) شرط التعامد $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \text{صفر}$

١١) $\text{شغ} = \vec{ق} \cdot \vec{ف}$

الشغل    القوة    الإزاحة

جول = نيوتن . م

إرج = داين . سم

① أوجد $\overrightarrow{\text{م}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}$ في الحالات التالية

(م) $\|\overrightarrow{\text{م}}\| = 6$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = 8$ ، $\theta = 60^\circ$

$\overrightarrow{\text{م}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{م}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|\,\text{جتا}\,\theta$

$= 6\times8\times\text{جتا}\,60^\circ = 24$

(ب) $\overrightarrow{\text{م}} = (5 ، 1 ، -2)$

$\overrightarrow{\text{ب}} = (4 ، -4 ، 3)$

$\overrightarrow{\text{م}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}} = (5\times4) + (1\times-4) + (-2\times3)$

$= 20 - 4 - 6 = 10$

② أوجد قياس الزاوية بين المتجهين في الحالات التالية

(م) $(5 ، 1 ، -2)$ ، $(1 ، 1 ، -1)$

$\text{جتا}\,\theta = \dfrac{\overrightarrow{\text{م}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{م}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \dfrac{5+1+2}{\sqrt{25+1+4}\times\sqrt{3}}$

$\theta = \text{جتا}^{-1}\dfrac{8}{\sqrt{90}} \simeq 32^\circ\ 30'\ 45''$

(ب) $\overrightarrow{\text{م}} = 4\overrightarrow{\text{س}} + 3\overrightarrow{\text{ص}} + 7\overrightarrow{\text{ع}}$

$\overrightarrow{\text{ب}} = 2\overrightarrow{\text{س}} + 5\overrightarrow{\text{ص}} + 4\overrightarrow{\text{ع}}$

$\text{جتا}\,\theta = \dfrac{8+15+28}{\sqrt{16+9+49}\times\sqrt{4+25+16}}$

$\therefore \theta = 27^\circ\ 53'\ 5''$

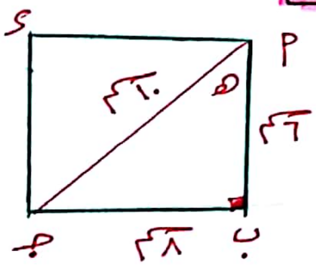
③ م ب ح ء مستطيل فيه م ب = ٦ سم ،
ب ح = ٨ سم أوجد

(م) $\overrightarrow{\text{مب}}\cdot\overrightarrow{\text{مح}}$

(ب) $\overrightarrow{\text{مب}}\cdot\overrightarrow{\text{حء}}$

(ج) مركبة $\overrightarrow{\text{حء}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{بح}}$

**الحل**




$\text{جا}\,\text{هـ} = \frac{8}{10}$

$\text{جتا}\,\text{هـ} = \frac{6}{10}$

(م) $\overrightarrow{\text{مب}}\cdot\overrightarrow{\text{مح}} = \|\overrightarrow{\text{مب}}\|\,\|\overrightarrow{\text{مح}}\|\,\text{جتا}\,\text{هـ}$

$= 6\times10\times\frac{6}{10} = 36$

(ب) $\overrightarrow{\text{مب}}\cdot\overrightarrow{\text{حء}} = 6\times6\ \text{جتا}\,180^\circ = -36$

(ج) مركبة $\overrightarrow{\text{حء}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{بح}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{حء}}\cdot\overrightarrow{\text{بح}}}{\|\overrightarrow{\text{بح}}\|}$

= صفر لأنه $\overrightarrow{\text{حء}} \perp \overrightarrow{\text{بح}}$

**٤** الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٧ $\overrightarrow{ع}$ لتحريك جسم من نقطة أ (١ ، ١ ، ٢) إلى ب (٧ ، ٤ ، ٥) = ــــــ

**الحل**

$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (٦ ، ٢ ، ٣)

ش = $\overrightarrow{ق}$ . $\overrightarrow{ف}$

= (٣ ، ٠ ، ٧) . (٦ ، ٢ ، ٣)

= ١٨ + ٠ + ٢١ = ٣٩ وحدة شغل

---

**٥** جيب تمام الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، −٣ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٠ ، ١) = ــــــ

**الحل**

$$جتا\,\theta = \frac{\overrightarrow{أ}\,.\,\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{2+0+0}{\sqrt{1+9}\times\sqrt{4+1}}$$

$$جتا\,\theta = \frac{2}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

---

**٦** قياس الزاوية بين المتجهين ٣ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ ، −٤ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ع}$ = ــــــ

**الحل**

$$جتا\,\theta = \frac{\overrightarrow{أ}\,.\,\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{(3,-1,0)\,.\,(-4,6,0)}{\sqrt{10}\times\sqrt{52}}$$

$$جتا\,\theta = \frac{-12-6}{\sqrt{10}\times\sqrt{52}} =$$ shift cos

∴ θ = ١٤٢° ٧' ٣٠"

---

**٧** إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، −٣ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٣ ، −ك) متعامدان فإن قيمة ك = ــــــ

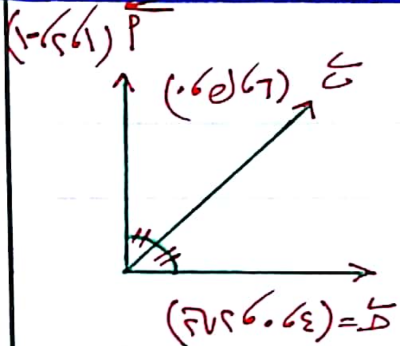
**الحل**

شرط التعامد $\overrightarrow{أ}$ . $\overrightarrow{ب}$ = ٠

∴ ٢ك − ٩ − ك = ٠

∴ ك = ٩

---




**٨** فيه ك = ــــــ

**الحل**

يتضح أن
قياس الزاوية بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$

جتا $\theta_{أ ، ب}$ = جتا $\theta_{ب ، جـ}$

$$\frac{\overrightarrow{أ}\,.\,\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\|\,\cancel{\|\overrightarrow{ب}\|}} = \frac{\overrightarrow{ب}\,.\,\overrightarrow{جـ}}{\cancel{\|\overrightarrow{ب}\|}\,\|\overrightarrow{جـ}\|}$$

$$\frac{6+2ك}{\sqrt{6}} = \frac{24}{\sqrt{24}}$$

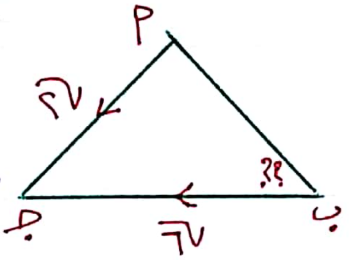
$$∴\ 6+2ك = \frac{24\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$$

∴ ٦ + ٢ك = ١٢

∴ ٢ك = ١٢ − ٦ ∴ ٢ك = ٦

$\boxed{∴\ ك = ٣}$

٩) في الشكل ق هـ




إذا كان

$\|\overrightarrow{\text{ب جـ}}\| = \sqrt{6}$ ، $\|\overrightarrow{\text{أ جـ}}\| = \sqrt{2}$ ، $\overrightarrow{\text{ب أ}} = (-1 ، 0 ، 1)$

فإن $\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \dots\dots$

**الحل**

$\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \|\overrightarrow{\text{ب أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب جـ}}\| \text{ جتا ب}$

$\because \|\overrightarrow{\text{أ ب}}\| = \sqrt{2}$

طبق قاعدة جيب التمام

$\text{جتا ب} = \frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2 - \text{ب}^2}{2 \text{ أ جـ}}$

$\text{جتا ب} = \frac{6 + 2 - 2}{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \sqrt{2} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

١٠) إذا كان $\vec{\text{أ}} = (1 ، -2 ، 1)$

$\vec{\text{ب}} = (-2 ، 1 ، 2)$

فإن المركبة الاتجاهية لـ $\vec{\text{أ}}$ في اتجاه $\vec{\text{ب}}$ = ......

**الحل**

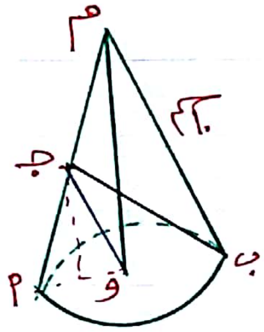
$\left(\frac{\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}}}{\|\vec{\text{ب}}\|^2}\right) \vec{\text{ب}}$

$= \frac{-2 - 2 + 2}{9} \times (-2 ، 1 ، 2)$

$= \frac{-2}{9} (-2 ، 1 ، 2)$

$= \left(\frac{4}{9} ، \frac{-2}{9} ، \frac{-4}{9}\right)$

١١) مخروط دائري قائم




محيط قاعدته = $12\pi$ سم

فإن $\overrightarrow{\text{ب جـ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ و}} = \dots\dots$

**الحل**

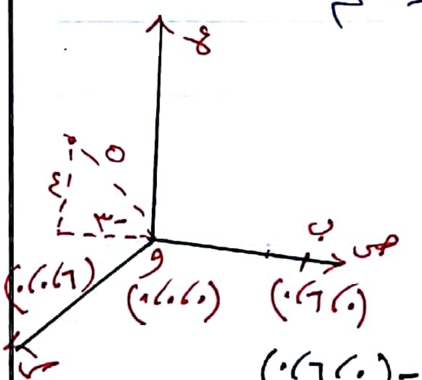
$\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \vec{\text{جـ}} - \vec{\text{ب}}$

$\overrightarrow{\text{جـ و}} = \vec{\text{و}} - \vec{\text{جـ}}$

$\because$ محيط القاعدة = $2\pi$ نق

$\therefore 2\cancel{\pi}\text{ نق} = 12\cancel{\pi}$

$\therefore$ نق = ٦ سم




م و = ٨ سم

و جـ = ٥ سم

جـ (٠ ، -٣ ، ٤)

$\therefore \overrightarrow{\text{ب جـ}} = (0 ، -3 ، 4) - (0 ، 6 ، 0)$

$= (0 ، -9 ، 4)$

$\overrightarrow{\text{جـ و}} = (0 ، 0 ، 0) - (0 ، -3 ، 4)$

$= (0 ، 3 ، -4)$

$\therefore \overrightarrow{\text{ب جـ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ و}} = (0 ، -9 ، 4) \cdot (0 ، 3 ، -4)$

$0 - 27 - 16 = -43$

**١٢** إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ جتا θ ، لو$_{٢}$ س ، جا θ)

$\overrightarrow{ب}$ = (جتا θ ، لو$_{٥}$ ٢٧ ، ٢ جا θ)

وكان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = ١١ فأوجد قيمة س = ....

**الحل**

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = ٢ جتا$^{٢}$ θ + لو$_{٢}$ س × لو$_{٥}$ ٢٧ + ٢ جا$^{٢}$ θ

٢ (جتا$^{٢}$ θ + جا$^{٢}$ θ) + لو$_{٢}$ س × لو$_{٥}$ ٢٧ = ١١

٢ + لو$_{٢}$ س × لو$_{٥}$ ٢٧ = ١١

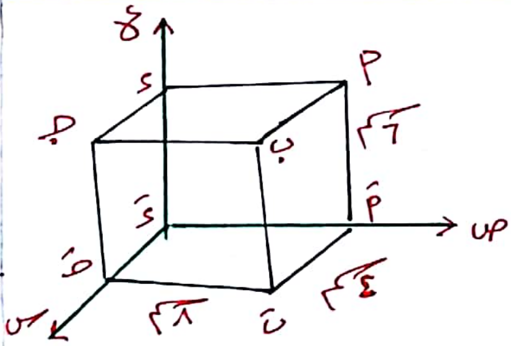
∴ لو$_{٢}$ س × لو$_{٥}$ ٢٧ = ٩

لو$_{٢}$ س = ٩ × لو$_{٢٧}$ ٥

∴ س = ٢$^{(٩ × لو_{٢٧} ٥)}$

∴ س = ٢١,٠٤

**١٣**




فى الشكل المقابل أوجد $\overrightarrow{بد} \cdot \overrightarrow{هـأ}$

**الحل**

$\overrightarrow{بد}$ = $\overrightarrow{د}$ - $\overrightarrow{ب}$ = (٦ ، ٠ ، ٠) - (٦ ، ٨ ، ٤)

= (-٤ ، -٨ ، ٠)

$\overrightarrow{هـأ}$ = $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{هـ}$ = (٦ ، ٨ ، ٠) - (٦ ، ٠ ، ٤)

= (-٤ ، ٨ ، ٠)

∵ $\overrightarrow{بد} \cdot \overrightarrow{هـأ}$ = (-٤ ، -٨ ، ٠) . (-٤ ، ٨ ، ٠)

= ١٦ - ٦٤ = -٤٨

**١٤** إذا كان $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{جـ}$ وكان

$\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (١ ، ٢ ، ١)

وكان ||$\overrightarrow{أ}$|| = ٤√٢ فإن $\overrightarrow{أ}$ = ...

**الحل**

نفرض أن أ (س ، ص ، ع) ∵ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{جـ}$

∴ ٢س + ٣ص + ٢ع = ٠

س + ٢ص + ع = ٠ × -٢ والجمع

$\cancel{-٢س}$ - ٤ص $\cancel{- ٢ع}$ = ٠

$\cancel{٢س}$ + ٣ص $\cancel{+ ٢ع}$ = ٠

-ص = ٠ ∴ ص = ٠

٢س + ٣×٠ + ٢ع = ٠

س + ع = ٠ ∴ س = -ع

∴ الاختيار الصحيح (-٤ ، ٠ ، ٤)

(٢ ، ٣ ، ١) (-٤ ، ٠ ، ٤) (٤ ، ٤ ، ٠) (٠ ، -٤ ، ٤)

# الدرس الرابع

## الضرب الاتجاهى والثلاثى القياسى

١) $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جا هـ}) \, \overrightarrow{\text{ى}}$

٢) $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$

٣) $\text{جا هـ} = \dfrac{\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$

٤) متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$

هو $\dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|}$ $\dfrac{\text{المتجه}}{\text{معياره}}$

٥) $\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}}$

$\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{س}}$

$\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}}$

٦) شرط توازى متجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

أ) $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ل} \, \overrightarrow{\text{ب}}$

ب) $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

جـ) $\dfrac{\text{أ}_\text{س}}{\text{ب}_\text{س}} = \dfrac{\text{أ}_\text{ص}}{\text{ب}_\text{ص}} = \dfrac{\text{أ}_\text{ع}}{\text{ب}_\text{ع}}$

٧) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقط فى الفراغ وكان

* $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فإن أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

* $\overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ فإن أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

٨) المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى

أ) = مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ضلعان متجاوران.

ب) = ضعف مساحة △ الذى فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ضلعاه.

٩) لاحظ أن مساحة △ = $\frac{1}{2}$ طول الضرب الاتجاهى لمتجهى ضلعيه.

١٠) المعنى الهندسى للضرب الثلاثى القياسى

= حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف غير متوازية $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ متلاقية.

$\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{و}}$ لأن جا ٠ = صفر

وكذلك $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} = 1$ ضرب قياسى لأن جتا ٠ = ١

أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ في الحالات التالية

**١** $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٦$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ٨$ ، $\theta = ٣٠^\circ$

**الحل**

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\ \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جا } \theta)\ \overrightarrow{\text{ى}}$$

$$= ٦ \times ٨ \times \text{جا } ٣٠ = ٢٤\ \overrightarrow{\text{ى}}$$

**٢** $\overrightarrow{\text{أ}} = (-٢ ، ٣ ، ١)$ $\overrightarrow{\text{ب}}(١ ، ٣ ، -٤)$

**الحل**

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٣ & -٤ \end{vmatrix}$$

$$= (-١٢-٣)\overrightarrow{\text{س}} - (٨-١)\overrightarrow{\text{ص}} + (-٦-٣)\overrightarrow{\text{ع}}$$

$$= -١٥\overrightarrow{\text{س}} - ٧\overrightarrow{\text{ص}} - ٩\overrightarrow{\text{ع}}$$

**٣** إذا كان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٦$ وكانت جيوب تمام اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ هي $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$

وكان $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٢ ، ٣ ، ٥)$ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$

**الحل**

$$\overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\ \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}} = ٦\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣}\right)$$

لاحظ أن المتجه = متجه الوحدة × معياره

$$\overrightarrow{\text{أ}} = (٤ ، -٤ ، ٢)$$

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٤ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= (-٢٠-٦)\overrightarrow{\text{س}} - (٢٠+٤)\overrightarrow{\text{ص}} + (١٢-٨)\overrightarrow{\text{ع}}$$

$$= -٢٦\overrightarrow{\text{س}} - ٢٤\overrightarrow{\text{ص}} + ٤\overrightarrow{\text{ع}}$$

**٤** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -٦٥\ \overrightarrow{\text{ى}}$

وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٥$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ٢٦$

أوجد قياس الزاوية بين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

**الحل**

$$\text{جا } \theta = \frac{\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\ \|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

$$\text{جا } \theta = \frac{٦٥}{٥ \times ٢٦} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \boxed{\theta = ٣٠^\circ} \text{ أو } ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ = \boxed{١٥٠^\circ}$$

**٥** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}} = \text{صفر}$

فإن $\overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}} = ---$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ (د) $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$

**الحل**

$\because \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ ‖ $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}} = \text{صفر}$

$\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{جـ}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ب}} \perp \overrightarrow{\text{جـ}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}} = \text{صفر}$

**٦** إذا كان $\vec{A} = (1, 2, 1)$ ، $\vec{B} = (3, 1, 2)$

أوجد

(أ) $\vec{A} \times \vec{B}$

(ب) متجه وحدة عمودي على $\vec{A}$ ، $\vec{B}$

الحل

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,\vec{س} + \vec{ص} - 5\,\vec{ع}$$

وعليه نحصل منه متجه وحدة

$$= \frac{(3, 1, -5)}{\sqrt{9+1+25}}$$

∴ يوجد متجهان وحدة في اتجاه عمودي على $\vec{A}$ ، $\vec{B}$

هما $\pm \frac{1}{\sqrt{35}} (3, 1, -5)$

---

**٧** $\dfrac{\|\vec{A} \times \vec{B}\|}{\vec{A} \cdot \vec{B}} = ---$

الحل

لاحظ أن $جا\,\theta = \dfrac{\|\vec{A} \times \vec{B}\|}{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|}$

∴ $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\,جا\,\theta$

المطلوب $= \dfrac{\cancel{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|}\,جا\,\theta}{\cancel{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|}\,جتا\,\theta} = ظا\,\theta$

---

**٨** إذا كان $\vec{A} = (3, -2, ك)$

، $\vec{B} = (1, م, 2)$

وكان $\vec{A} \parallel \vec{B}$ فإن ك = 6 ، م = $\frac{-2}{3}$

الحل

$$\frac{3}{1} = \frac{-2}{م} = \frac{ك}{2}$$

$$م = \frac{1 \times -2}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$ك = \frac{2 \times 3}{1} = 6$$

---

**٩** إذا كان $\vec{A} = (-1, 2, 2)$

، $\|\vec{B}\| = 6$ ، $\vec{A} \parallel \vec{B}$ أوجد $\vec{B}$

الحل

∵ $\vec{A} \parallel \vec{B}$ ∴ $\vec{B} = ك\,\vec{A}$

$\|\vec{B}\| = |ك|\,\|\vec{A}\|$ ، $\|\vec{A}\| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$6 = |ك|\,3$

$|ك| = 2$ ∴ $ك = \pm 2$

∴ $\vec{B} = \pm 2(-1, 2, 2)$

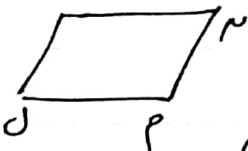
∴ $\vec{B} = (-2, 4, 4)$ أو $\vec{B} = (2, -4, -4)$

---

**١٠** احسب مساحة متوازي الأضلاع الذي رؤوسه

ل $(1, 1)$ ، م $(2, 3)$ ، ن $(5, 4)$

الحل



$\vec{ل م} = \vec{م} - \vec{ل} = (1, 2)$

$\vec{ن م} = \vec{م} - \vec{ن} = (-3, -1)$

∴ $\vec{ل م} \times \vec{ن م} = (1, 2) \times (-3, -1)$

$= (-1 + 6)\,\vec{ع} = 5\,\vec{ع}$

= 5 وحدة مساحة

**(١١)** أوجد مساحة $\triangle$ أ ب جـ الذي فيه أ $(4, 0, 2)$ ، ب $(2, 1, 5)$ ، جـ $(-1, 0, -1)$

**الحل**

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (-2, 1, 3)$

$\overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (-5, 0, -3)$

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

$= -3\,\overrightarrow{\text{س}} - 21\,\overrightarrow{\text{ص}} + 5\,\overrightarrow{\text{ع}}$

مساحة $\triangle = \frac{1}{2}\sqrt{9 + (21)^2 + 25}$

$= \frac{5}{2}\sqrt{19}$ وحدة مربعة

**(١٢)** أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف غير متوازية يمثلها المتجهات $\overrightarrow{\text{أ}} (3, -4, 1)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} (0, 2, -3)$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}} (3, 2, 2)$

**الحل**

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3(4 + 6) + 4(0 + 9) + (0 - 6)$

$= 30 + 36 - 6 = 60$ وحدة حجم

**(١٣)** اثبت أن

$\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|^2 + (\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}})^2 = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2$

**الحل**

الأيمن $= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 \text{جا}^2\theta + \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 \text{جتا}^2\theta$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 (\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta)$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 =$ الأيسر #

**(١٤)** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = 0$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{0}$ فإن إما $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{0}$ أو $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{0}$

**الحل**

$\because \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = 0 \quad \therefore \overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ أو أحدهما $\overrightarrow{0}$ (١)

$\because \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{0} \quad \therefore \overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ أو أحدهما $\overrightarrow{0}$ (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{0}$ أو $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{0}$

# الوحدة الثانية

## الدرس الأول : معادلات المستقيم في الفراغ

### (أ) الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

المار بالنقطة أ = (س١، ص١، ع١)

ومتجه اتجاهه $\vec{\text{ى}}$ = (أ، ب، جـ)

① الصورة المتجهة

$$\vec{\text{ر}} = \vec{\text{أ}} + \text{ك}\,\vec{\text{ى}}$$

② المعادلات البارامترية

$$\text{س} = \text{س}_1 + \text{ك أ}$$

$$\text{ص} = \text{ص}_1 + \text{ك ب}$$

$$\text{ع} = \text{ع}_1 + \text{ك جـ}$$

③ الصورة الإحداثية

$$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$$

④ معادلة محور س ص = ٠ ، ع = ٠

⑤ معادلة المستقيم المار بـ (أ، ب، جـ) موازياً لمحور س

ص = ب ، ع = جـ

**في كل من المعادلات الآتية أوجد النقطة أ ومتجه الاتجاه $\vec{\text{ى}}$**

①

$$\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} + ٣}{٥} = \frac{\text{ع} - ٢}{٤}$$

النقطة أ = (١، -٣، ٢)

$\vec{\text{ى}}$ = (٢، ٥، ٤)

②

$$\text{س} + ٢ = \frac{\text{ص} - ١}{٣} = \frac{\text{ع}}{٧}$$

أ (-٢، ١، ٠)

$\vec{\text{ى}}$ (١، ٣، ٧)

③

$$\frac{٢\text{س} - ٤}{٦} = \frac{٣ - \text{ص}}{٢} = \frac{\text{ع} + ١}{٥}$$

نضبطها

$$\frac{\text{س} - ٢}{٣} = \frac{\text{ص} - ٣}{-٢} = \frac{\text{ع} + ١}{٥}$$

أ (٢، ٣، -١)

$\vec{\text{ى}}$ (٣، -٢، ٥)

④ $س = ص - ١$ ، $ع = ٣$

**الحل**

$\frac{س - ٠}{١} = \frac{ص - ١}{١}$ ، $ع = ٣ + (٠) ل$

النقطة $م(٠، ١، ٣)$

$\vec{ه}(١، ١، ٠)$

⑤ $\frac{٢س - ١}{٣} = \frac{-ع + ٧}{٢}$ ، $ص = ٢$

**الحل**

$\frac{س - \frac{١}{٢}}{\frac{٣}{٢}} = \frac{ع - ٧}{-٢}$ ، $ص = ٢ + ٠ × ل$

النقطة $م(\frac{١}{٢}، ٧، ٢)$

$\vec{ه}(\frac{٣}{٢}، -٢، ٠)$

## أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

⑥ المار بنقطة الأصل والمتجه $(-٢، ٣، ١)$ متجه اتجاه له

**الحل**

$م(٠، ٠، ٠)$ $\vec{ه} = (-٢، ٣، ١)$

المعادلة المتجهة

$\vec{ر} = ل(-٢، ٣، ١)$

المعادلة البارامترية:

$س = -٢ل$ ، $ص = ٣ل$ ، $ع = ل$

المعادلة الكارتيزية

$\frac{س}{-٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{١}$

⑦ المار بالنقطتين $(٢، -١، ٥)$ ، $(-٣، ١، ٤)$

**الحل**

متجه الاتجاه $\vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ}$

$= (-٣، ١، ٤) - (٢، -١، ٥) = (-٥، ٢، -١)$

المعادلة المتجهة

$\vec{ر} = (-٣، ١، ٤) + ل(-٥، ٢، -١)$

المعادلة البارامترية

$س = -٣ - ٥ل$ $ص = ١ + ٢ل$

$ع = ٤ - ل$

المعادلة الكارتيزية

$\frac{س + ٣}{-٥} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{ع - ٤}{-١}$

⑧ المار بالنقطة $(٣، ٢، ٥)$ ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية

**الحل**

$جتا^٢ θ_س + جتا^٢ θ_ص + جتا^٢ θ_ع = ١$

$٣ جتا^٢ θ = ١$

$جتا^٢ θ = \frac{١}{٣}$ $جتا θ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ موجبة فقط

∴ متجه الاتجاه هو $(\frac{١}{\sqrt{٣}}، \frac{١}{\sqrt{٣}}، \frac{١}{\sqrt{٣}})$

وهنا هنستخدم الاختصار $\vec{ه}(١، ١، ١)$

تعرف تكمل انت الحل ؟

**٩** الذى معادلته المتماثلة

$$\frac{س+٣}{٢} = \frac{٢ص-١}{٥} = \frac{٣ع+٢}{٤}$$

**الحل**

$$\frac{س+٣}{٢} = \frac{ص-\frac{١}{٢}}{\frac{٥}{٢}} = \frac{ع+\frac{٢}{٣}}{\frac{٤}{٣}}$$

$أ\left(-٣ ، \frac{١}{٢} ، \frac{-٢}{٣}\right)$

$\overrightarrow{هـ} = \left(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣}\right)$

$\overrightarrow{ر} = \left(-٣ ، \frac{١}{٢} ، \frac{-٢}{٣}\right) + ك\left(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣}\right)$

أكمل انت

---

**١٠** المار بالنقطة (٣ ، ٤ ، ١) موازياً لمحور س

**الحل**

الفكرة $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٤ ، ١)$

$\overrightarrow{هـ} = (١ ، ٠ ، ٠)$ ← متجه اتجاه محور س

أكمل الحل

---

**١١** المار بالنقطة (−٣ ، ٤ ، ٥) وزوايا الاتجاه له (٣٠° ، ٩٠° ، ٦٠°)

**الحل**

متجه الوحدة له = (جتا ٣٠ ، جتا ٩٠ ، جتا ٦٠)

$\overrightarrow{هـ} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠ ، \frac{١}{٢}\right)$

أكمل الباقى

---

**١٢** المار بنقطة الأصل ونسب الاتجاه له ٢ ، −١ ، ٧ ثم أوجد إحداثيات نقطة عليه

**الحل**

$\overrightarrow{ر} = ك(٢ ، -١ ، ٧)$ المتجهة

البارامترية

س = ٢ك   ص = −ك   ع = ٧ك

الإحداثية

$$\frac{س}{٢} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع}{٧}$$

لإيجاد نقطة عليه

نضع ك = ١ أو ٢ أو ٣ مثلاً

عند ك = ١

النقطة (٢ ، −١ ، ٧)

---

**١٣** النقطة التى تقع على المستقيم

$\overrightarrow{ر} = (٢ ، -١ ، ٣) + ك(١ ، ٢ ، -١)$

هى ....

أ (١ ، ١ ، ١)   ب (٠ ، ٢ ، −٢)

ج (٣ ، ١ ، ٢)   د (٤ ، −٣ ، ٠)

عوض عن ك = ١ فتلاقى النقطة

---

**١٤** جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٣ ، −٥) ، (−٢ ، ١ ، −٨)

أ (٦ ، ٢ ، ٣)   ب (٢ ، ٤ ، −١٢)

ج $\left(\frac{٦}{٧} ، \frac{٢}{٧} ، \frac{٣}{٧}\right)$   د $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، ٠\right)$

اطرحهم وحول لمتجه وحدة

## لاحظ

تعاملك مع المستقيم في الفراغ يكون من خلال متجه الاتجاه $\vec{ه}$
هنستخدمه في إيجاد الزاوية
وفي شرط التوازي والتعامد
وفي إيجاد زاوية بين المستقيم والمحاور
وأي شيء هيكون من خلال $\vec{ه}$

### (١) قياس الزاوية بين مستقيمين في الفراغ

$$\boxed{جتا\,\theta = \frac{|\vec{ه}_1 \cdot \vec{ه}_2|}{\|\vec{ه}_1\|\,\|\vec{ه}_2\|}}$$

* لاحظ انه في حالة أعطاك جيوب تمام الأول وجيوب تمام الثاني هنضربهم فقط ومش هنقسم لأن مقياسهما = ١

### أوجد قياس الزاوية بين

**(٢)** المستقيمين اللذين نسب الاتجاه لهما
$(1 ، 1 ، 2)$ ، $(1 ، 1 ، 4)$

**الحل**

$$جتا\,\theta = \frac{|8+1+1|}{\sqrt{4+1+1}\times\sqrt{16+1+1}} = \frac{10}{\sqrt{18\times 6}}$$

$\therefore \theta = 15^\circ\ 47'\ 35''$

**(٣)** بين المستقيمين $\vec{ر}_1 = (-2 ، 5 ، -7) + ك(-6 ، 6 ، 8)$
، $\vec{ر}_2 = (1 ، -2 ، 3) + ك'(4 ، 12 ، -6)$

**الحل**

$\vec{ه}_1 = (-6 ، 6 ، 8)$ $\quad$ $\vec{ه}_2 = (4 ، 12 ، -6)$

$$جتا\,\theta = \frac{|-24+72-48|}{\sqrt{36+36+64}\times\sqrt{16+144+36}} = صفر$$

$\therefore \theta = 90^\circ$ متعامدان

**(٤)** $2س = 3ص = -ع$ ، $6س = -ص = -4ع$

**الحل**

$\div 6$ $\qquad$ $\div 12$

$\frac{س}{3} = \frac{ص}{2} = \frac{ع}{-6}$ ، $\frac{س}{2} = \frac{ص}{-12} = \frac{ع}{-3}$

$\vec{ه}_1 = (3 ، 2 ، -6)$ $\quad$ $\vec{ه}_2 = (2 ، -12 ، -3)$

$$جتا\,\theta = \frac{|6-24+18|}{\|\vec{ه}_1\|\,\|\vec{ه}_2\|} = صفر$$

$\therefore \theta = 90^\circ$

**(٥)** قياس الزاوية بين المستقيم

$$\frac{س-1}{\sqrt{2}} = \frac{ص-\sqrt{2}}{1} = \frac{ع+1}{1}$$

مع الاتجاه الموجب لمحور ع

**الحل**

$\vec{ه} = (\sqrt{2} ، 1 ، 1)$
هنعمل متجه وحدة ونوجد جتا $\theta_ع$

$$= \frac{(\sqrt{٢}، ١، ١)}{\sqrt{٢+١+١}} = (\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٢})$$

$\therefore$ جتا $\theta_٣ = \frac{١}{٢}$

$\therefore \theta_٣ = ٦٠°$

## ٦ إذا كان قياس الزاوية بين

$\frac{س}{م} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{١}$ ، $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع}{-١}$

هو ٦٠° فإن قيمة م = ....

**الحل**

$\overset{\frown}{ه}_١ = (م، ٢، ١)$ $\overset{\frown}{ه}_٢ = (٢، ١، -١)$

$$\frac{|٢م + ٢ - ١|}{\sqrt{م^٢ + ٤ + ١} \times \sqrt{٤ + ١ + ١}} = \text{جتا } ٦٠° = \frac{١}{٢}$$

$\times ٢$

$٢م + ١ = \frac{١}{٢} \times \sqrt{٦} \times \sqrt{م^٢ + ٥}$

بتربيع الطرفين

$(٤م + ٢)^٢ = (\sqrt{٦} \sqrt{م^٢ + ٥})^٢$

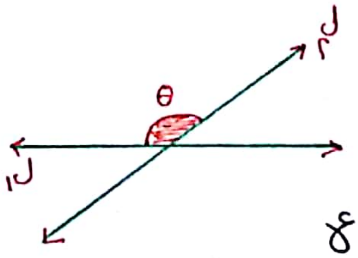
$١٦م^٢ + ١٦م + ٤ = ٦(م^٢ + ٥)$

$١٦م^٢ + ١٦م + ٤ = ٦م^٢ + ٣٠$

$١٠م^٢ + ١٦م - ٢٦ = ٠$

$\therefore م = ١$ أو $م = \frac{-١٣}{٥}$

## ٧ من الشكل المقابل




$ل_١$ : س = ٠ ، ص = ع

، $ل_٢$ : ص = ٠ ، س = ع

فإن θ = .......

أ ١٢٠°  ب ١٣٥°  ج ١٥٠°  د ١٦٥°

---

$\overset{\frown}{ه}_١ = (٠، ١، ١)$ $\overset{\frown}{ه}_٢ = (١، ٠، ١)$

جتا $\theta = \frac{|٠ + ٠ + ١|}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{١}{٢}$ الصغرى

$\therefore \theta_{\text{الصغرى}} = ٦٠°$

$\therefore \theta_{\text{المطلوبة}} = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°$

## ١ شرط توازي مستقيمين

$\overset{\frown}{ه}_١ \times \overset{\frown}{ه}_٢ = \overset{\frown}{٠}$

$\overset{\frown}{ه}_١ = ك \overset{\frown}{ه}_٢$

$\frac{م_س}{ب_س} = \frac{م_ص}{ب_ص} = \frac{م_ع}{ب_ع}$

---

## ٢ شرط تعامد مستقيمين

$\overset{\frown}{ه}_١ \cdot \overset{\frown}{ه}_٢ = ٠$  $أ_١أ_٢ + ب_١ب_٢ + ج_١ج_٢ = ٠$

---

## ٣ المستقيمان متوازيان إذا اشتركا في نقطة فإنهما منطبقان

## ٤ المستقيمان المتوازيان والمتقاطعان يجمعهما مستوى واحد

## ٥ المستقيمان المتعامدان إما

متقاطعان أو متخالفان

**٨** إذا كان $\vec{م} = (-٢ ، ل ، -٣)$

يوازى متجه اتجاه المستقيم

$$\frac{س+٢}{٤} = \frac{ص}{٨} = \frac{ع-١}{٦}$$

فاوجد قيمة ل

الحل

$\vec{ه}_1 = (-٢ ، ل ، -٣)$ ، $\vec{ه}_2 = (٤ ، ٨ ، ٦)$

$$\frac{-٢}{٤} = \frac{ل}{٨} = \frac{-٣}{٦}$$

$$ل = \frac{-٢ \times ٨}{٤} = -٤$$

---

**٩** إذا كان $\frac{س+٢}{٦} = \frac{ص-١}{ل} = \frac{ع-١}{٣}$

عمودياً على المستقيم

$$\frac{س-٩}{-٢} = \frac{ص+٨}{١} \text{ ، } ع = ٣$$

فإن ل = ...

الحل

$\vec{ه}_1 = (٦ ، ل ، ٣)$ ، $\vec{ه}_2 = (-٢ ، ١ ، ٠)$

$-١٢ + ل + ٠ = ٠$ شرط التعامد

$\therefore ل = ١٢$

---

لإيجاد نقطة التقاطع

$$\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$$

---

**١٠** اثبت أن المستقيمين

$$\vec{ر}_1 = \hat{ص} + ك_1(\hat{س} + ٢\hat{ص} - \hat{ع})$$

$$\vec{ر}_2 = (\hat{س} + \hat{ص} + \hat{ع}) + ك_2(-\hat{س} - ٢\hat{ص})$$

متقاطعان فى نقطة وأوجد نقطة تقاطعهما

الحل

عند نقطة التقاطع $\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$

$$(٠ ، ١ ، ٠) + ك_1(١ ، ٢ ، -١) = (١ ، ١ ، ١) + ك_2(-١ ، -٢ ، ٠)$$

$ك_1 = ١ - ٢ك_2$

$\therefore ك_1 + ٢ك_2 = ١ \leftarrow ①$

فى الجزء الثالث من النقط

$-ك_1 = ١ \leftarrow ②$ $\therefore \boxed{ك_1 = -١}$

فى ① $٢ك_2 = ١ + ١$

$\therefore \boxed{ك_2 = ١}$

وفى تحقق المعادلة ②

$١ + ٢ك_1 = ١ - ٢ك_2 \leftarrow ③$

$١ - ٢ = ١ - ٢$ تمام كده فعلاً

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان فى النقطة

$$(٠ ، ١ ، ٠) - (١ ، ٢ ، -١) = (-١ ، -١ ، ١)$$

---

على فكرة إذا $ك_1 ، ك_2$ لم تحقق المعادلة الثالثة

فإن المستقيمان متخالفان وغير متقاطعان

**١١** أثبت أن المستقيمين

$\vec{r}_1 = (1,2,4) + k_1(2,-1,1)$

$\vec{r}_2 = (1,1,1) + k_2(-2,7,11)$

متعامدان ثم أثبت أنهما متخالفان

## الحل

$\vec{d}_1 = (2,-1,1)$ ، $\vec{d}_2 = (-2,7,11)$

$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = -4 - 7 + 11 = 0$

∴ متعامدان

عند نقطة التقاطع فرضاً يعني $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$

$1 + 2k_1 = 1 - 2k_2$

$2k_1 + 2k_2 = 0$

$\boxed{k_1 + k_2 = 0}$ ①

$2 - k_1 = 1 + 7k_2$

$-k_1 - 7k_2 = 1 - 2$

$\boxed{-k_1 - 7k_2 = -1}$ ②

$4 + k_1 = 1 + 11k_2$

$\boxed{k_1 - 11k_2 = -3}$ ③

بحل المعادلتين ①، ② بالجمع

$-6k_2 = -1$ ∴ $k_2 = \frac{1}{6}$

ومنها $k_1 = \frac{-1}{6}$

بالتعويض في ③

$\frac{-1}{6} - 11 \times \frac{1}{6} \neq -3$ لا تحقق المعادلة ③

∴ المستقيمان متعامدان ومتخالفان

ولو مش مصدق اسأل ماما

## المسافة بين نقطة ومستقيم في الفراغ

بعد النقطة $B$ عن المستقيم $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{d}$

$$= \frac{\|\vec{AB} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

**١٢** أوجد طول العمود المرسوم من النقطة $(2,1,-4)$ على المستقيم

$\vec{r} = (1,-1,2) + k(2,3,-2)$

$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (1,-1,2) - (2,1,-4)$

$= (-1,-2,6)$

$$\vec{AB} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$= (4-18)\hat{i} - (2-12)\hat{j} + (-3+4)\hat{k}$

$= -14\hat{i} + 10\hat{j} + \hat{k}$

$$\text{طول العمود} = \frac{\sqrt{(14)^2 + (10)^2 + (1)^2}}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-2)^2}}$$

$\simeq 4{,}18$ وحدة طول

# الدرس الثانى
## معادلة المستوى فى الفراغ

**(١)** الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة $أ(س_١، ص_١، ع_١)$ والمتجه $\overrightarrow{ن} (أ، ب، جـ)$ عمودى عليه.

**(أ)** $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ الصورة المتجهة

**(ب)** الصورة القياسية

$أ(س - س_١) + ب(ص - ص_١) + جـ(ع - ع_١) = ٠$

**(جـ)** الصورة العامة

$أ س + ب ص + جـ ع + د = ٠$

حيث $د = -\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

---

**(٢)** كيفية تعيين المستوى فى الفراغ

ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

مستقيمان متقاطعان

مستقيمان متوازيان وغير ~~منطبقين~~

مستقيم ونقطة لا تنتمى إليه

---

**(١)** أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة $(٢، -٣، ١)$ والمتجه $\overrightarrow{ن} = (١، -٢، ٣)$ عمودى عليه.

**الحل**

$\overrightarrow{أ} (٢، -٣، ١)$ $\overrightarrow{ن} = (١، -٢، ٣)$

$\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ} = ٢ + ٦ + ٣ = ١١$

الصورة المتجهة

$\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

$(١، -٢، ٣) \cdot \overrightarrow{ر} = ١١$

الصورة القياسية

$١(س - ٢) - ٢(ص + ٣) + ٣(ع - ١) = ٠$

الصورة العامة

$س - ٢ - ٢ص - ٦ + ٣ع - ٣ = ٠$

$س - ٢ص + ٣ع - ١١ = ٠$

---

ملحوظة فى الصورة العامة

معامل $(س، ص، ع)$ هو متجه عمودى على المستوى.

---

**(٢)** أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط

$أ(٢، -١، ٠)$ $ب(-١، ٣، ٤)$

$جـ(٣، ٠، ٢)$

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = ٠$$

$$= \begin{vmatrix} س - ٢ & ص + ١ & ع \\ -٣ & ٤ & ٤ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$(س - ٢)(٨ - ٤) - (-٦ - ٤)(ص + ١) + (-٣ - ٤)ع = ٠$

$٤(س - ٢) + ١٠(ص + ١) - ٧ع = ٠$ الصورة القياسية

$٤س - ٨ + ١٠ص + ١٠ - ٧ع = ٠$

$٤س + ١٠ص - ٧ع + ٢ = ٠$ الصورة العامة

$(٤ ، ١٠ ، -٧) \cdot \vec{ر} = -٢$ الصورة المتجهة

اختر

١) معادلة المستوى المار بالنقطة (١، −٢، ٥) والمتجه (٢، ١، ٣) عمودي عليه

أ) $٢س + ص + ٣ع = ١$

ب) $٢س + ص + ٣ع = ١٥$

ج) $س - ٢ص + ٥ع = ١٥$

د) $س + ص + ع = ٤$

٢) معادلة المستوى المار بالنقطة (١، ٢، ٣) ويوازي محوري الإحداثيات س، ص هي

أ) $س + ص = ٣$ ب) $ع = ٣$

ج) $س = ١$ د) $ص = ٢$

٣) معادلة المستوى المار بالنقط (٢، ٣، ٥)، (−١، −١، ١)، (٤، ٣، −٢) هي ...

أ) $س + ص - ع = ٠$ ب) $س = -١$

ج) $ص = ٣$ د) $ع = -٢$

٤) معادلة المستوى الموازي لمحور س هي ...

أ) $أس + جـ ع + د = ٠$

ب) $ب ص + جـ ع + د = ٠$

ج) $أس + ب ص + د = ٠$

د) $أس + ب ص + جـ ع + د = ٠$

٥) المعادلة $٣ص + ٤ع = ٠$ تمثل ...

أ) مستوى يحوي محور ع

ب) مستوى يحوي محور س

ج) مستوى يحوي محور ص

د) مستقيم نسب اتجاهه (٠، ٣، ٤)

٦) المستوى $٣س - ٢ص + ٤ع = ١٢$ يقطع من محور س جزءاً طوله ...

أ) ٣ ب) −٤ ج) ٤ د) ٦

$$\frac{٣س}{١٢} - \frac{٢ص}{١٢} + \frac{٤ع}{١٢} = ١$$

$$\frac{س}{٤} - \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{٣} = ٠$$

يقطع من محور س ٤ وحدات

ومن محور ص ٦ وحدات

(٧) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى
س + ٥ص − ٦ع = ٣٠ هي أ ، ب ، جـ
فإن أ + ب + جـ = .

(أ) صفر (ب) ٣٠ (جـ) ٣١ (د) ٤١

الحل

$\frac{س}{٣٠} + \frac{٥ص}{٣٠} + \frac{-٦ع}{٣٠} = ١$

$\frac{س}{٣٠} + \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{-٥} = ١$

٣٠ + ٦ − ٥ = ٣١ أي جـ

(٨) إذا كان المستوى ٢أس − ٣أص + ٤أع + ٦ = ٠ ينصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي الكرتين س² + ص² + ع² + ٦س − ٨ص − ٢ع = ١٣ ، س² + ص² + ع² − ١٠س + ٤ص − ٢ع = ٨
فما قيمة أ ؟

الحل

م١ = (−٣ ، ٤ ، ١) ، م٢ = (٥ ، −٢ ، ١)

المنتصف = $\left(\frac{-٣+٥}{٢} ، \frac{٤-٢}{٢} ، \frac{١+١}{٢}\right)$

= (١ ، ١ ، ١)

بالتعويض فى معادلة المستوى

٢أ − ٣أ + ٤أ + ٦ = ٠

٣أ + ٦ = ٠

٣أ = −٦

∴ $\boxed{أ = -٢}$

(٩) إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب . احسب مساحة △ أ ب جـ

الحل

$\frac{٣س}{١٢} + \frac{٢ص}{١٢} + \frac{٤ع}{١٢} = ١$

$\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{٣} = ١$

أ (٤ ، ٠ ، ٠) ب (٠ ، ٦ ، ٠)

جـ (٠ ، ٠ ، ٣)

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-٤ ، ٦ ، ٠)$

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ} = (-٤ ، ٠ ، ٣)$

$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٤ & ٦ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$

= ١٨ $\overrightarrow{س}$ + ١٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٢٤ $\overrightarrow{ع}$

∴ مساحة △ = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{(١٨)^٢ + (١٢)^٢ + (٢٤)^٢}$

= ٣ $\sqrt{٢٩}$ وحدة مربعة

**١٠** اثبت أن المستقيمين

ل₁ : ٢س = ٣ص = ٤ع ÷ ١٢

ل₂ : ٣س = ٢ص = ٥ع ÷ ٣٠

متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذي يحويهما.

## الحل

$$\frac{٢س}{١٢} = \frac{٣ص}{١٢} = \frac{٤ع}{١٢}$$

$$\frac{س}{٦} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٣}$$

ه₁ (٦ ، ٤ ، ٣) ويمر بالنقطة (٠ ، ٠ ، ٠)

$$\frac{٣س}{٣٠} = \frac{٢ص}{٣٠} = \frac{٥ع}{٣٠}$$

$$\frac{س}{١٠} = \frac{ص}{١٥} = \frac{ع}{٦}$$

ه₂ = (١٠ ، ١٥ ، ٦) ويمر بالنقطة (٠ ، ٠ ، ٠)

∴ المستقيمان يمران بنقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠) فهما متقاطعان

نوجد متجه عمودي على ل₁ ، ل₂ من الضرب الاتجاهي

$$ه_1 \times ه_2 = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٦ & ٤ & ٣ \\ ١٠ & ١٥ & ٦ \end{vmatrix}$$

= (٢٤ - ٤٥) س - (٣٦ - ٣٠) ص + (٩٠ - ٤٠) ع

= - ٢١ س - ٦ ص + ٥٠ ع

معادلة المستوى هي

أ س + ب ص + جـ ع + د = ٠

- ٢١ س - ٦ ص + ٥٠ ع = ٠

$\boxed{د = ٠}$ لأنه يمر بنقطة الأصل

**١١** أوجد معادلة المستوى الذي يحتوى المستقيم ل₁ : ر = (٠ ، ٣ ، -٥) + ك (٦ ، -٢ ، -١) ويوازي ل₂ : ر = (١ ، ٧ ، -٤) + ك (١ ، -٣ ، ٣)

## الحل

النقطة أ (٠ ، ٣ ، -٥) لأنه يحوى المستقيم

ه₁ = (٦ ، -٢ ، -١)  ه₂ = (١ ، -٣ ، ٣)

نوجد المتجه العمودي عليهما ه₁ × ه₂

$$= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٦ & -٢ & -١ \\ ١ & -٣ & ٣ \end{vmatrix}$$

ن = (-٩ ، -١٩ ، -١٦)

ن . ر = ن . أ

(-٩ ، -١٩ ، -١٦) . ر = (٠ ، ٣ ، -٥) . (-٩ ، -١٩ ، -١٦)

-٩ س - ١٩ ص - ١٦ ع - ٢٣ = ٠

**١٢** أوجد معادلة المستوى المار بـ (٢ ، ١ ، ٤) ويوازي المستوى ٢س + ٣ص + ٥ع = ١

## الحل

لاحظ أن المستوى المطلوب موازي للمعلوم

∴ العمودي عليهما هو نفسه (٢ ، ٣ ، ٥)

وعندك النقطة (٢ ، ١ ، ٤) واكمل انت

**(١٣)** أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع مع المستوى س + ٢ص + ٣ع = ١٢

**الحل**

نفرض أن س = ص = ع = ل

بالتعويض فى معادلة المستوى

ل + ٢ل + ٣ل = ١٢      ٦ل = ١٢

∴ ل = ٢

∴ النقطة (٢ ، ٢ ، ٢)

---

**(١٤)** أوجد نقطة تقاطع المستقيم ر = (١ ، ٤ ، ٢) + ل (٣ ، ٢ ، ٢) مع المستوى (٣ ، ٢ ، ٢) . ر = −٢

**الحل**

بالتعويض عن ر فى معادلة المستوى

(٣ ، ٢ ، ٢) . [(١ ، ٤ ، ٢) + ل (٣ ، ٢ ، ٢)] = −٢

(٣ ، ٢ ، ٢) . (١ + ٣ل ، ٤ + ٢ل ، ٢ + ٢ل) = −٢

٣ + ٩ل + ٨ + ٤ل + ٤ + ٤ل = −٢

١٧ل = −٢ − ١٥

١٧ل = −١٧      ∴ ل = −١

∴ نقطة التقاطع

(١ ، ٤ ، ٢) − (٣ ، ٢ ، ٢) = (−٢ ، ٢ ، ٠)

---

**(١٥)** أوجد نقطة تقاطع المستويات

٢س + ص − ع = −١ ← (١)

س + ص + ع = ٢ ← (٢)

٣س − ص − ع = ٦ ← (٣)

**الحل**

بحل (٢) ، (٣) بالجمع

٤س = ٨      ∴ س = ٢

بحل (١) ، (٢) بالجمع

٣س + ٢ص = ١

٦ + ٢ص = ١

٢ص = ١ − ٦      ٢ص = −٥

∴ ص = −٥/٢

بالتعويض فى (١)

٤ − ٥/٢ − ع = −١

٤ − ٥/٢ + ١ = ع      ع = ٥/٢

∴ نقطة التقاطع هى (٢ ، −٥/٢ ، ٥/٢)

---

**(١٦)** أوجد نقطة تقاطع المستقيم ٢س = ٣ص − ١ = ع − ٤ مع المستوى ٣س + ص − ٢ع = ٥

**الحل**

٢س = ٣ص − ١ = ع − ٤ = ل

٣ص = ل + ١      ص = (ل + ١)/٣      ع = ل + ٤

٢س = ل      س = ل/٢

بالتعويض فى معادلة المستوى

٣ (ل/٢) + (ل+١)/٣ − ٢(ل+٤) = ٥ ‏ ×٦

٩ل + ٢ل + ٢ − ١٢ل − ٤٨ = ٣٠

− ل = ٣٠ + ٤٦

∴ $\boxed{\text{ل} = -٧٦}$

∴ س = −٧٦/٢ = −٣٨

ص = (−٧٦+١)/٣ = −٢٥

ع = −٧٦ + ٤ = −٧٢

∴ نقطة التقاطع (−٣٨، −٢٥، −٧٢)

---

**(١٧)** عين وضع كل من النقط أ(−٣، ٣، ٥)، ب(٦، ٥، ١)، جـ(٦، −٥، ١) بالنسبة للمستوى ٢س − ٣ص + ٤ع − ٥ = ٠

**الحل**

بالتعويض فى معادلة المستوى

أ: −٦ − ٩ + ٢٠ − ٥ = ٠ ∈ للمستوى

ب: ١٢ − ١٥ + ٤ − ٥ = −٤ ∉ للمستوى

جـ: ١٢ + ١٥ + ٤ − ٥ = ٢٦ ∉ للمستوى

∴ ب، جـ لا تنتميان للمستوى وتقعان فى جهتين مختلفتين منه.

الزاوية بين المستقيم ه والمستوى ن

= ٩٠° − θ

جتا θ = |ه . ن| / (||ه|| ||ن||)

---

**(١٨)** أوجد قياس الزاوية بين المستقيم (س−١)/٢ = (ص−٢)/١ = (ع+٣)/−٢ والمستوى س + ص + ٤ = ٠ هو−

**الحل**

ه = (٢، ١، −٢)

ن = (١، ١، ٠)

جتا θ = |٢ + ١| / (√(٤+١+٤) × √٢) = ٣/(٣√٢) = ٤٥°

θ المطلوبة = ٩٠ − [٤٥] = ٤٥°

بنأخذ المتممة لأن الناتج هو الزاوية بين المستقيم والعمودى ولكن احنا عايزين بين المستقيم والمستوى.

---

* معادلة المستوى المار بنقطة الأصل $\boxed{\text{د} = ٠}$

أس + ب ص + جـ ع = ٠

* عندما أ = ٠ ‏ ب ص + جـ ع + د = ٠
يوازى محور س وعمودى على المستوى ص ع

* عندما أ = ٠، د = ٠ ‏ ب ص + جـ ع = ٠
يحوى محور س وعمودى على المستوى ص ع

وهكذا

# الدرس الأخير
## الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ

**قياس الزاوية بين مستويين**

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{ن_1} \cdot \overrightarrow{ن_2}|}{\|\overrightarrow{ن_1}\|\,\|\overrightarrow{ن_2}\|} \qquad ٠ \leq \theta \leq ٩٠^\circ$$

(١) إذا كان $\overrightarrow{ن_1} \cdot \overrightarrow{ن_2} = ٠$ متعامدان

(٢) $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} \neq \frac{د_1}{د_2}$ متوازيين وغير منطبقين

(٣) $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} = \frac{د_1}{د_2}$ منطبقين

**(١) أوجد قياس الزاوية بين المستويين**

$٢س - ص + ع = ٥$

$٤س + ٢ص - ٢ع = ١$

**الحل**

$\overrightarrow{ن_1} = (٢، -١، ١)$ ، $\overrightarrow{ن_2} = (٣، ٢، -٢)$

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|٦ - ٢ - ٢|}{\sqrt{٤+١+١} \times \sqrt{٩+٤+٤}}$$

$\therefore \theta \simeq ٧٨^\circ\ ٣٤'\ ٤٢''$

**(٢) أوجد قيمة ل إذا كان المستويين متوازيين**

$٢س - ص + ل ع = ٥$

$س + ل ص + ٤ع = ١$

**الحل**

$$\frac{٢}{١} = \frac{-١}{ل} = \frac{ل}{٤}$$

$\boxed{ل = -\frac{١}{٢}}$ $\boxed{ل = ٨}$

**(٣) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين**

$س + ص + ٢ع + ١ = ٠ \leftarrow (١)$

$٢س + ص - ع + ١ = ٠ \leftarrow (٢)$

**الحل**

بضرب (١) × −١ والجمع

$س - ٣ع = ٠$

$س = ٣ع$ بوضع $\boxed{ع = ك}$

$\boxed{س = ٣ك}$

في (١)

$٣ك + ص + ٢ك + ١ = ٠$

$\boxed{ص = -١ - ٥ك}$

∴ المعادلات البارامترية لخط التقاطع هي

$س = ٣ك$ ، $ص = -١ - ٥ك$ ، $ع = ك$

**طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى**

$$ل = \frac{|أس_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

حيث $(س_1، ص_1، ع_1)$ النقطة

$(أ، ب، جـ)$ اتجاه العمودي للمستوى

**٤** أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١، -١، ٣) على المستوى الذى معادلته $\vec{ر} \cdot (٢، ٢، -١) = ٥$

**الحل**

معادلة المستوى فى الصورة العامة

$٢س + ٢ص - ع - ٥ = ٠$

$$ل = \frac{|(٢\times١) + (٢\times-١) - ٣ - ٥|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$$

$$= \frac{|٢ - ٢ - ٨|}{٣} = \frac{٨}{٣} \text{ وحدة طول}$$

**٥** إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة أ(٠، -١، ٢) على المستوى $\sqrt{٢}$ س + ص - ع + ل = ٠ هو ٢ وحدة طول فأوجد قيمة ل

**الحل**

$$٢ = \frac{|٠ - ١ - ٢ + ل|}{\sqrt{٢ + ١ + ١}}$$

$$٢ = \frac{|ل - ٣|}{٢} \qquad |ل - ٣| = ٤$$

$ل - ٣ = \pm ٤$

$ل = \pm ٤ + ٣$

$ل = ٤ + ٣ = ٧$ | $ل = -٤ + ٣ = -١$

$\therefore ل = -١$ أو $٧$

**٦** كرة مركزها (١، ٢، ١) تمس سطح المستوى س + ص + ع = ١ أوجد معادلة الكرة

**الحل**

نق الكرة = طول العمود المرسوم من مركزها للمستوى

$$نق = \frac{|١ + ٢ + ١ - ١|}{\sqrt{١ + ١ + ١}} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$$

$\therefore$ معادلة الكرة

$(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٣$

**٧** اثبت أن المستويين

$٢س + ص + ٢ع = ٨$

$٤س + ٢ص + ٤ع + ٥ = ٠$

متوازيين وأوجد البعد بينهما

**الحل**

$$\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} \neq \frac{٨}{-٥}$$

$\therefore$ المستويان متوازيان وغير منطبقين

لإيجاد البعد بينهما نفرض نقطة على الأول ونجيب بعدها عن الثانى أو العكس

س = ٠ ، ص = ٠ $\therefore$ ٢ع = ٨

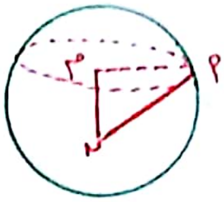
ع = ٤

(٠، ٠، ٤) بعدها عن المستوى الثانى

$$= \frac{|٠ + ٠ + ١٦ + ٥|}{\sqrt{١٦ + ٤ + ١٦}} = \frac{٢١}{٦} = ٣٫٥ \text{ وحدة طول}$$

(٨) إذا قطع المستوى ٢س − ص − ٢ع + ١٢ = ٠
الكرة (س+٣)² + (ص+٢)² + (ع−١)² = ١٥
أوجد مساحة المقطع الناتج

**الحل**



مركز الكرة هو
م (−٣، −٢، ١)

طول نصف قطرها هو م أ = √١٥ تمام؟

م ن هو البعد بين المركز ومعادلة المستوى

م ن = |−٦ + ٢ − ٢ + ١٢| / √(٤ + ١ + ٤) = ٦/٣ = ٢ وحدة

∴ نصف قطر المقطع الناتج

نق = √(١٥ − ٤) = √١١

∴ مساحة المقطع الناتج = π نق²

= ١١ π وحدة مربعة

(٩) أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى
٢س + ص − ٤ع + ٥ = ٠
والواقع على بعد √٢١ من (١، ٢، ٠)

**الحل**

∵ المستوى ٢س + ص − ٤ع + ٥ = ٠

∴ معادلته تكون على الصورة

٢س + ص − ٤ع + د = ٠

نطبق البعد بين (١، ٢، ٠) والمستوى = √٢١

|٢ + ٢ − ٠ + د| / √(٤ + ١ + ١٦) = √٢١

|د + ٤| / √٢١ = √٢١

|د + ٤| = ٢١

د + ٤ = ±٢١ ، د = ±٢١ − ٤

د = ٢١ − ٤ ، د = ١٧ | د = −٢١ − ٤ ، د = −٢٥

∴ المستويان هما

٢س + ص − ٤ع + ١٧ = ٠

، ٢س + ص − ٤ع − ٢٥ = ٠

لإيجاد النسبة التي يقسم بها مستوى المسافة
بين النقطتين من الداخل هـ ل : ل؟

انتهى بفضل الله منهج الهندسة الفراغية

مع أطيب تمنياتي القلبية بالنجاح والتفوق للجميع

أ/ محمد أدهم
معلم رياضيات